

Федеральное государственное образовательное  
учреждение высшего профессионального  
образования “Московский физико-технический  
институт (государственный университет)”

Кафедра Физики Высоких Энергий

Выпускная Квалификационная Работа

Парциально-волновой анализ системы 3-х  
бесспиновых частиц.

Шумаков Антон Анатольевич<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт, МФТИ, Долгопрудный

<sup>2</sup>Институт физики высоких энергий, ИФВЭ, Протвино

**Научные руководители:**

Ивашин Антон Владимирович

Хохлов Юрий Анатольевич

Протвино, 2015

## Аннотация

Рассматривается техника проведения парциально-волнового анализа системы трёх частиц с нулевым спином. Описываются некоторые особенности реализации данного метода анализа. Приводятся результаты применения написанного программного комплекса к анализу системы  $\pi^+\pi^-\pi^-$  в реакции  $\pi^-Be \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^-Be$  при импульсе пионного пучка 29 ГэВ в эксперименте ВЕС ИФВЭ.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Трёхчастичный ПВА</b>	<b>5</b>
2.1	Общее описание . . . . .	5
2.2	Выражение для амплитуды . . . . .	5
2.3	Предположения . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Программное исполнение</b>	<b>9</b>
3.1	Общие положения . . . . .	9
3.2	Функция правдоподобия . . . . .	9
3.3	Нормировки . . . . .	10
3.4	Самосогласованность . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Результаты анализа</b>	<b>11</b>
4.1	$\pi^+\pi^-\pi^-$ : отбор . . . . .	11
4.2	$\pi^+\pi^-\pi^-$ : анализ . . . . .	12
4.3	Прохождение известных волн . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Приложения</b>	<b>16</b>
6.1	Установка ВЕС . . . . .	16
6.2	Волны, использованные в анализе . . . . .	17

# 1 Введение

Спектроскопия лёгких мезонов исторически является обширным направлением в физике высоких энергий. Она интересна тем, что, ввиду большой константы связи в КХД при маленьких передачах импульса, состояния не имеют теоретического описания из первых принципов. Поэтому, работая в этой области, важно иметь методы анализа данных, максимально не зависящие от внутреннего устройства изучаемых объектов. Одной из возникающих при работе с лёгкими мезонами проблем является перекрытие различных резонансов и невозможность различить их в массовых спектрах всей системы. Для этого используется метод парциально-волнового анализа, который основывается на декомпозиции исходного состояния по состояниям с определёнными квантовыми числами. С ростом статистики роль этого метода только возрастает. Как пример последних исследований с применением ПВА можно привести [2], [3], [4].

Одной из целей данной работы является разработка программного комплекса для трёхчастичного ПВА. Другой целью этой работы является освоение методики ПВА, поэтому никаких целей связанных с физическими результатами не ставится.

Описание методики трёхчастичного ПВА даётся в разделе 2. В том числе выводятся спиновые части амплитуд в разделе 2.2, а в разделе 2.3 приводятся основные предположения, которые делаются при выполнении анализа. Программное исполнение и первичная проверка работоспособности программы приводятся в разделе 3. В разделах 4.1 и 4.2 описаны соответственно отбор реальных событий и ПВА на отобранных данных. В конце приводится серия тестов на работоспособность программы в разделе 4.3.

## 2 Трёхчастичный ПВА

### 2.1 Общее описание

В данной работе будет рассматриваться парциально-волновой анализ системы трёх мезонов. Преимуществом его по сравнению с ПВА двухчастичной системы является однозначность решения, а недостатком - необходимость использовать изобарную модель.

Основой для проведения ПВА является базис, по которому будут раскладываться амплитуда события. И одной из его частей является спиновая. Существуют разные подходы к её описанию. Самым красивым с нашей точки зрения является подход Земаха, описанный в [5]. Но для неподготовленного человека он сложен для понимания, поэтому от такого подхода мы отказались изначально. Мы выбрали спиновый формализм, основанный на спиральности. Примеры использования такого формализма есть в [1] и [6]. Этот формализм достаточно универсален, и его можно относительно легко расширить на большее число последовательных распадов или на более высокие спины. Тензорный формализм Земаха лишён такой универсальности. От введения изоспиновой части амплитуды мы отказались из-за намерения применить в дальнейшем этот программный комплекс к нахождению изоспинового расщепления масс различных мезонов.

Оставшаяся неопианной динамическая часть амплитуды сейчас в основном формируется с помощью изобарной модели. Предполагается, что в системе происходят только последовательные двухчастичные распады. Поэтому в изобарной модели распад исходного состояния может проходить только через определённые каналы, которые в свою очередь есть какие-то резонансы с известными массами и ширинами. У такого подхода существуют некоторые недостатки, которые описаны например в [6]. Но несмотря на них сейчас приближение изобарной модели используется во многих работах по трёхчастичному ПВА.

### 2.2 Выражение для амплитуды

Рассмотрим реакцию  $a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4$ , где  $a, 1, 2, 3$  - бесспиновые мезоны. Амплитуда такой реакции выглядит как

$$f_{\lambda_b \lambda_4} = \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 \lambda_4 | U | \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b \lambda_b \rangle,$$

где все величины соответствуют системе центра масс всех частиц. Для начала выделим некую произвольную пару конечных частиц (в этом случае выбрана пара (23)) и сменим систему координат.

$$f_{\lambda_b \lambda_4} = \langle \mathbf{p}_{123} \Phi \Theta M_{23} \psi \chi | U | \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b \lambda_b \rangle, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}_{123} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$ ,  $\Phi$  и  $\Theta$  - азимутальный и полярный углы импульса димезона в системе центра масс трёх частиц,  $\psi$  и  $\chi$  - азимутальный и полярный углы импульса одного из мезонов в системе центра масс димезона. Базис конечных состояний с конкретными углами может быть выражен через базис состояний с фиксированными значениями углового момента и спиральности.

$$\langle \mathbf{p}_{123} \Phi \Theta M_{23} \psi \chi | \mathbf{p}_{123} J \Lambda M_{23} j \lambda \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, 0) D_{\lambda_0}^{j*}(\psi, \chi, 0),$$

где  $J, \Lambda$  - момент и спиральность системы (123), а  $j, \lambda$  - момент и спиральность выбранной системы (23). Подставляя это в (1) получаем

$$f_{\lambda_b \lambda_4} = \sum_{J\Lambda j\lambda} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, \psi) d_{\lambda_0}^j(\chi) \langle \mathbf{p}_{123} J\Lambda M_{23} j\lambda | U | \mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b \lambda_b \rangle =$$

$$\sum_{J\Lambda j\lambda} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, \psi) d_{\lambda_0}^j(\chi) g_{\Lambda\lambda_b \lambda_4}^{Jj}(s, t, M_{123}, M_{23}), \quad (2)$$

где введена  $g_{\Lambda\lambda_b \lambda_4}^{Jj}(s, t, M_{123}, M_{23})$  - амплитуда вероятности получить из начального состояния, состояние с конкретными значениями  $J, \Lambda, j, \lambda$ . Далее заменим в избранном базисе  $\lambda$  на  $l$  - угловой момент между димезоном и третьим мезоном.

$$g_{\Lambda\lambda_b \lambda_4}^{Jj}(s, t, M_{123}, M_{23}) = \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{2J+1}} \langle l0j\lambda | J\lambda \rangle h_{\Lambda\lambda_b \lambda_4}^{Jjl}(s, t, M_{123}, M_{23}), \quad (3)$$

где  $\langle l0j\lambda | J\lambda \rangle$  - коэффициенты Клебша-Гордона.

Выбранные состояния кроме всего прочего в системе (123) являются состояниями с определённой чётностью  $P = \eta_1 \eta_2 \eta_3 (-1)^{l+j}$ . Поэтому можно включить чётность в индексы состояний.

До этого момента мы во многом повторяли вывод [1], но в этом месте для ускорения вычислений было решено не менять систему координат, а сразу ввести натуральность. Обсуждение корректности данного шага находится в разделе 3.3.

Рассмотрим сначала процесс, где пучок движется вдоль  $z$ , а (123) рождается в плоскости  $zx$ . Если применить преобразование четности, то пучок станет двигаться вдоль  $-z$  (то есть противоположно). Однако если повернуть дополнительно на  $\pi$  относительно оси  $y$ , то все импульсы совпадут с непреобразованным состоянием. Однако все спиральности поменяют знак. Поэтому после преобразования  $\hat{Y} = e^{-i\pi \hat{J}_y} \hat{P}$  амплитуда  $f_{\Lambda\lambda_b \lambda_4}$  будет равна  $f_{-\Lambda-\lambda_b-\lambda_4}$  для преобразованной реакции. Поскольку чётность сохраняется, то

$$f_{\Lambda\lambda_b \lambda_4} = S f_{-\Lambda-\lambda_b-\lambda_4},$$

где знак  $S$  определяется соглашениями относительно преобразования чётности:  $S = P(-1)^{J-\Lambda}$ , где  $P$  зависит только от  $\lambda_b, \lambda_4$  и внутренней чётности частиц. Поскольку в матрице плотности осуществляется суммирование по спиральностям, то для элементов матрицы плотности получаем:

$$\rho_{\Lambda\Lambda'} = (-1)^{\Lambda-\Lambda'} \rho_{-\Lambda-\Lambda'}.$$

То есть имеем нетривиальные условия связывающие разные элементы матрицы плотности. Это не удобно и является основной причиной введения другого представления для амплитуды. Очевидно причина неудобства в том, что  $\hat{Y}$  переводит  $\Lambda$  в  $-\Lambda$ . Определим

$$|J^P \Lambda j l \eta\rangle = c_\Lambda (|J^P \Lambda j l\rangle + \eta P(-1)^{J+1+\Lambda} |J^P - \Lambda j l\rangle), \quad (4)$$

где  $c_\Lambda = \sqrt{\frac{1}{2}}$  для  $\Lambda \neq 0$  и  $c_\Lambda = \frac{1}{2}$  для  $\Lambda = 0$ . Тогда

$$\hat{Y} |J^P \Lambda j l \eta\rangle = -\eta |J^P \Lambda j l \eta\rangle,$$

где  $\eta$  мы будем называть натуральностью, поскольку при определенных условиях это число совпадает с натуральностью обмена в смысле реджевской теории, но в общем случае не совпадает с ним. Тогда очевидно, то условия на элементы матрицы плотности сводятся к

$$\rho_{\Lambda\Lambda'\eta\eta'} = \eta\eta' \rho_{\Lambda\Lambda'\eta\eta'}$$

Очевидно, что при  $\eta \neq \eta'$  имеем  $\eta\eta' = -1$ , что ведёт к обращению в нуль соответствующего элемента, поэтому матрица плотности является диагональной по натуральности.

Используя (4) и свойство D-функций

$$D_{-\Lambda-\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, \psi) = (-1)^{\Lambda-\lambda} D_{\Lambda\lambda}^J(\Phi, \Theta, \psi)$$

получаем выражение для амплитуды:

$$f_{\lambda_b\lambda_4} = \sum_{J(\Lambda \geq 0)j\lambda\lambda_\eta} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \langle l0j\lambda | J\lambda \rangle c_\Lambda d_{\lambda_0}^j(\chi) \cdot \\ \cdot (D_{\Lambda\lambda}^{J*}(\Phi, \Theta, \psi) + \eta P (-1)^{J+1+\Lambda} D_{-\Lambda\lambda}^J(\Phi, \Theta, \psi)) h_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{JPj\lambda_\eta}(s, t, M_{123}, M_{23}). \quad (5)$$

Квадрат амплитуды вычисляется следующим образом:

$$\omega = \sum_{\lambda_b\lambda_4} f_{\lambda_b\lambda_4}^* f_{\lambda_b\lambda_4}.$$

Это приводит нас к определению матрицы плотности

$$\rho_{JP\Lambda\eta JP'\Lambda'\eta'}^{lj'l'j'}(s, t, M_{123}, M_{23}) = \sum_{\lambda_b\lambda_4} h_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{JPj\lambda_\eta} (h_{\Lambda'\lambda_b\lambda_4}^{JP'j'\lambda_\eta'})^*.$$

## 2.3 Предположения

*Предположение 1.* В самом начале раздела 2.2 был закреплён выбор пары частиц, образующих димезон. Естественно, что эту пару можно выбирать разными способами и это не повлияет на последующий вывод амплитуды. Но если использовать изобарную модель, то станет видно, что для конкретной изобары предпочтительным оказывается представление, в котором в качестве димезона выбрана пара, образующаяся после распада изобары. Основная часть амплитуды в таком “правильном” представлении сосредотачивается в членах с  $j$  соответствующем спину изобары, тогда как другие представления “размазывают” изобару по всем  $j$ . Предполагается, что этими “размазанными” членами можно пренебречь. Также из-за того, что высокоспиновые резонансы подавлены вводится обрезание по  $J$  и по  $l$ . Поэтому выражение для амплитуды выглядит так:

$$f_{\lambda_b\lambda_4} = \sum_{J(\Lambda \geq 0)jn\lambda\lambda_\eta}^{J_{max}l_{max}} G_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{JPjn\lambda_\eta} h_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{JPjn\lambda_\eta}(s, t, M_{123}, M_n),$$

где  $n$  - номер пары, в которой рождается изобара. ( $n = 1$  для (23)) Каждая уникальная пара индексов ( $jn$ ) описывает изобару со спином  $j$  в димезоне  $n$ .

*Предположение 2.* В предыдущем предположении мы выделили зависимость  $h$  от изобары. Для устранения этой зависимости предположим

$$h_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{JPjnl\eta}(s, t, M_{123}, M_n) = \bar{h}_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{JPjnl\eta}(s, t, M_{123})BW^{jn}(M_n)q^j p^l.$$

Здесь  $p$  - импульс димезона в системе (123), а  $q$  - импульс одного из мезонов в системе димезона. Такое представление пороговых факторов взято из [1]. Функция  $BW$  - релятивистский Брейт-Вигнер:

$$BW(M_n) = \frac{\sqrt{k}}{(M_n^2 - M_{res}^2) + iM_{res}\Gamma}$$

$$k = \frac{2\sqrt{2}M_{res}\Gamma\gamma}{\pi\sqrt{M_{res}^2 + \gamma}}, \gamma = \sqrt{M_{res}^2(M_{res}^2 + \Gamma^2)}$$

*Предположение 3.* Для уменьшения количества параметров матрицы плотности предполагается возможность разделения её на части условно соответствующие рождению и распаду.

$$\bar{h}_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{JPjnl\eta}(s, t, M_{123}) = T_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{JP\eta}(s, t, M_{123})C^{JPljn}(s, t, M_{123}).$$

Упрощённая матрица плотности запишется в виде

$$\bar{\rho}_{\Lambda\Lambda'}^{JP\eta J^{P'}\eta'}(s, t, M_{123}) = \sum_{\lambda_b\lambda_4} T_{\Lambda\lambda_b\lambda_4}^{JP\eta} (T_{\Lambda'\lambda_b\lambda_4}^{J^{P'}\eta'})^*.$$

Для избежания вырождения по параметрам минимизации для каждого  $J^P$  один из  $C^{JPljn}$  фиксируется. Для простоты он фиксируется к единице.

*Предположение 4.* На случай тождественных частиц амплитуда должна быть соответствующим образом симметризована:

$$f_{\lambda_b\lambda_4}^{sym} = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{\lambda_b\lambda_4} + \hat{P}_{ij}f_{\lambda_b\lambda_4}),$$

где  $\hat{P}_{ij}$  - оператор перестановки тождественных частиц  $i$  и  $j$ . Симметризация в случае трёх тождественных частиц рассматриваться не будет. Если две из трёх частиц тождественны, то при изначальном рассмотрении, изложенном в предыдущих разделах, возникают две изобары, не отличающиеся ничем, кроме пары, в которой рождаются. Одна изобара рождается в паре "нетождественная частица + первая тождественная частица" а другая - в паре "нетождественная частица + вторая тождественная частица". При действии оператора перестановки на такую амплитуду элементы матрицы плотности не меняются, а меняются соответствующие функции углов и двухчастичных масс.

$$f^{sym} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dots + \sum_{J(\Lambda \geq 0)l\eta} T_{\Lambda}^{JP\eta}(C^{JPljn}M_{\Lambda}^{JPjnl\eta} + C^{JPljn'}M_{\Lambda}^{JPjn'l\eta}) +$$

$$+ \sum_{J(\Lambda \geq 0)l\eta} T_{\Lambda}^{JP\eta}(C^{JPljn}M_{\Lambda}^{JPjn'l\eta} + C^{JPljn'}M_{\Lambda}^{JPjnl\eta})) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\dots + \sum_{J(\Lambda \geq 0)l\eta} T_{\Lambda}^{JP\eta}(C^{JPljn} + C^{JPljn'})(M_{\Lambda}^{JPjnl\eta} + M_{\Lambda}^{JPjn'l\eta})).$$



Как можно видеть из предложенных выкладок, симметризованная амплитуда не зависит от  $C^{J^P l_j n}$  или  $C^{J^P l_j n'}$  в отдельности, а зависит от их суммы. Поэтому вторая изобара выкидывается без ущерба для общности, а соответствующий ей вклад автоматически появляется после симметризации амплитуды.

## 3 Программное исполнение

### 3.1 Общие положения

Существуют различные программы для парциально-волнового анализа. Например [9] или [10]. Было предложено написать свою программу для ПВА исходя из учебных соображений. Несмотря на учебную цель программы, было решено реализовать максимально универсальную архитектуру. С другой стороны при написании программы мы столкнулись с сильным замедлением производительности программы при попытке сделать её максимально универсальной. В итоге был найден приемлемый для нас компромисс между универсальностью и производительностью.

В программе минимизирующая часть отделена от части вычисления амплитуды, и при необходимости может быть заменена. В данный момент используется минимизатор Minuit2. Часть вычисления амплитуды состоит из класса, реализующего матрицу плотности, класса, реализующего набор функций углов, и класса, реализующего вычисление амплитуды и функции правдоподобия.

### 3.2 Функция правдоподобия

Введём величину, пропорциональную сечению:

$$\omega = \sum_{\lambda_b \lambda_4} f_{\lambda_b \lambda_4}^* f_{\lambda_b \lambda_4} = \sum_{ij} \rho_{ij} \mathcal{M}_i \mathcal{M}_j^*.$$

Для получения элементов матрицы плотности из данных эксперимента используется метод максимума правдоподобия. Введём  $\tau$  - совокупность переменных трёхчастичного фазового объёма и  $A(\tau)$  - аксептанс. Тогда вероятность найти событие в точке  $\tau$  есть  $\omega(\tau)A(\tau)$ . Полный интеграл по всему трёхчастичному фазовому объёму от этого выражения должен давать единицу. Это приводит нас к расширению ММП условием  $\int \omega(\tau)A(\tau)d\tau = 1$ . Применяя метод Лагранжа для условной минимизации мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \sum_{i=1}^{N_{input}} \ln \omega(\tau_i) - \lambda \left( \int \omega(\tau)A(\tau)d\tau - 1 \right). \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \rho_{jk}} &= \sum_{i=1}^{N_{input}} \frac{\mathcal{M}_j \mathcal{M}_k^*}{\omega(\tau_i)} - \lambda \int \mathcal{M}_j \mathcal{M}_k^* A(\tau) d\tau = 0 \\ \sum_{jk} \rho_{jk} \left( \sum_{i=1}^{N_{input}} \frac{\mathcal{M}_j \mathcal{M}_k^*}{\omega(\tau_i)} - \lambda \int \mathcal{M}_j \mathcal{M}_k^* A(\tau) d\tau \right) &= 0, \end{aligned}$$

откуда видно, что  $\lambda = N_{input}$ . Убирая независимые по параметрам минимизации получаем функцию, максимум которой и будет находиться в программе:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N_{input}} \ln \omega(\tau_i) - N_{input} \int \omega(\tau) A(\tau) d\tau.$$

На практике вычисление второго члена функции правдоподобия реализуется с помощью генерации равномерно распределённых по трёхчастичному фазовому объёму событий и протягивании их через установку. Далее с помощью этих событий методом Монте-Карло считаются интегралы

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\Lambda\Lambda'}^{J^P J'^{P'} jj' nn' ll' \eta \eta'} &= \int A(\tau) \mathcal{M}_{\Lambda}^{J^P jnl\eta}(\tau) (\mathcal{M}_{\Lambda'}^{J'^{P'} j'n'l'\eta'}(\tau))^* d\tau \\ &= \frac{1}{N_{input}} \sum_i^{N_{input}} A'(\tau_i) \mathcal{M}_{\Lambda}^{J^P jnl\eta}(\tau_i) (\mathcal{M}_{\Lambda'}^{J'^{P'} j'n'l'\eta'}(\tau_i))^*, \end{aligned}$$

где в качестве  $A'(\tau_i)$  используется флажок, который ставится равным 1, если событие прошло использованную для реальных данных процедуру фильтрации, и равным 0, если не прошло. Полученные интегралы сохраняются в отдельный файл и при подсчёте функции правдоподобия сворачиваются по всем индексам с матрицей плотности для получения второго члена.

### 3.3 Нормировки

Формула для амплитуды (5) у нас получилась существенно зависимой от выбора димезона. Углы  $\Phi, \Theta, \psi, \chi$  определены только при указании к какому димезону они относятся. Поэтому используя предположение 1 мы по факту смешали в одной сумме функции от разных угловых переменных. Программное исполнение вычисления амплитуды от этого абсолютно не страдает, но при интегрировании этих функций по трёхчастичному фазовому объёму нужно корректно учитывать якобиан, если мы хотим использовать ортонормированность введённого базиса. Но из-за введения пороговых факторов нормировка оказывается итак нарушенной. Поэтому было принято решение нормировку функций учитывать “на лету”, вычисляя её методом Монте-Карло перед вычислением всего остального. Также стоит заметить, что нормировка должна быть разной в разных бинах из-за порогового фактора  $p^l$ , который зависит от трёхчастичной массы. Возникает также вопрос о том, не исчезла ли ортогональность базиса функций при предложенных выше действиях. Но преобразование углов линейное, и поэтому появление якобиана приведёт лишь к потери нормированности на единицу, а ортогональность сохранится. Следовательно вычисление нормировки “на лету” оправдано.

### 3.4 Самосогласованность

Для проверки самосогласованности программы и правильности написания её нефизической части был предложен следующий метод. В одном массовом бине ( $m = 1.29$  ГэВ) был произведён анализ, и на основе его результатов были сгенерированы новые

события – предсказание. Про отбор реальных данных, которые были использованы в этом пункте можно прочитать в разделе 4.1. Сравнивались угловые распределения реальных данных и угловые распределения предсказания. На гистограммах 1 изображены полярный угол димезона  $\pi^+\pi^-$  в системе (123) и полярный угол одного из мезонов в системе димезона. Насколько можно видеть, они выглядят достаточно похоже. Далее это предсказание прогонялось через весь процесс анализа, как-будто это есть реальные данные. Таким образом получалось предсказание на предсказание. Как можно видеть из гистограмм 1 угловые распределения первого предсказания и второго совпадают, что говорит нам о самосогласованности написанного программного комплекса.

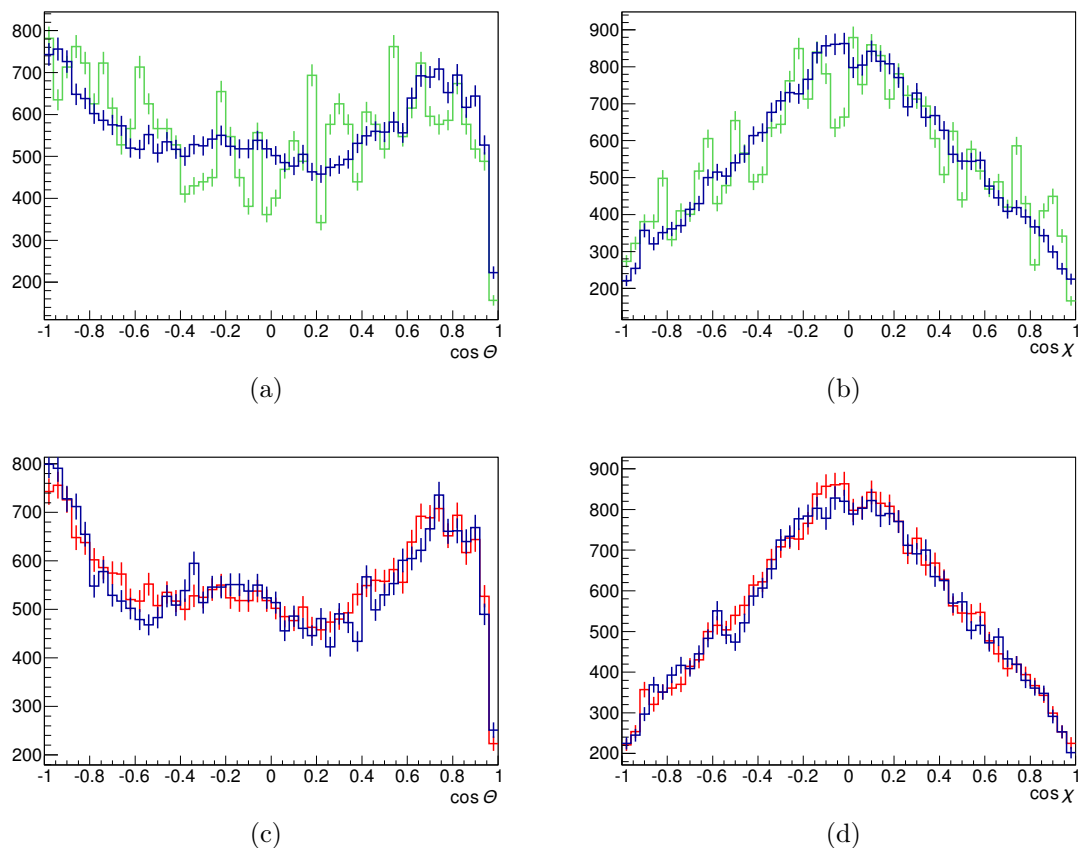


Рис. 1: Угловые распределения в бине  $m = 1.29$  ГэВ. (а), (b) - реальные данные и первое предсказание. (с), (d) - сравнение первого предсказания и второго.

## 4 Результаты анализа

### 4.1 $\pi^+\pi^-\pi^-$ : отбор

В качестве тестовой системы для проведения ПВА была избрана система  $\pi^+\pi^-\pi^-$  из-за простоты отбора и общеизвестных результатов анализа. Рассматривалась реакция  $\pi^-Ve \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^-Ve$  при импульсе пионного пучка 29 ГэВ. Использована

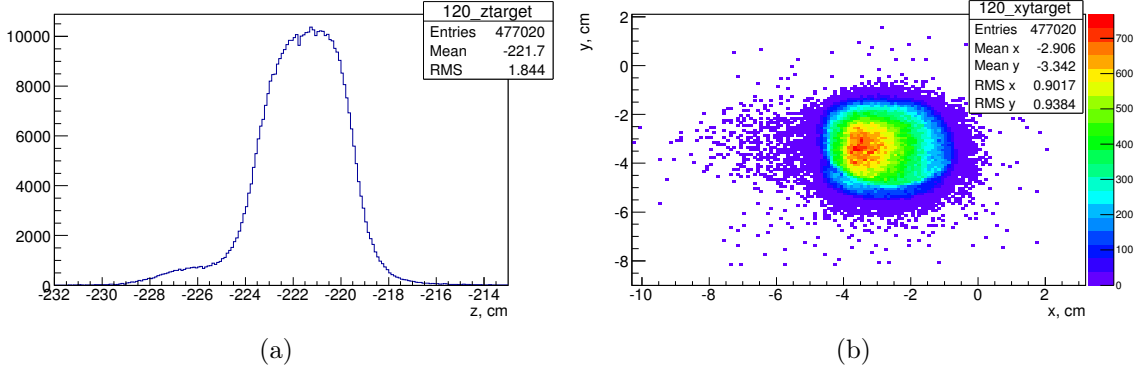


Рис. 2: (a) - Распределение событий по координате  $z$  вершины. (b) - Распределение событий по поперечным координатам вершины.

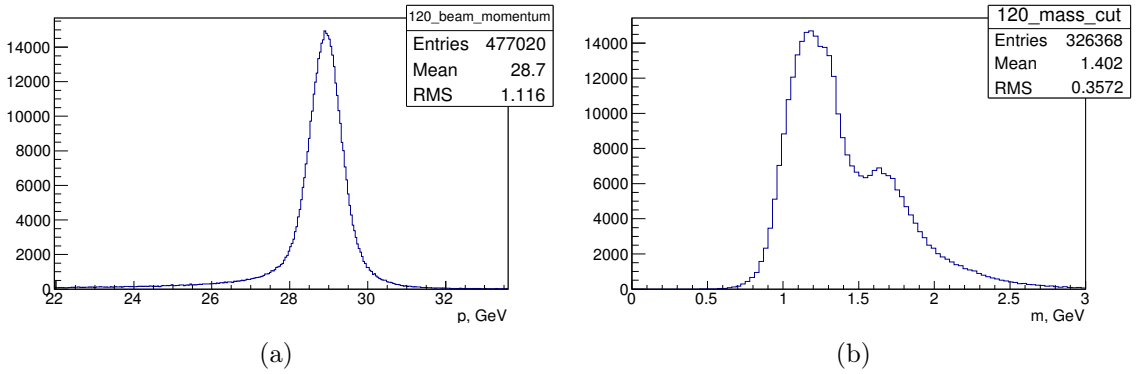


Рис. 3: (a) - Распределение событий по реконструированному импульсу пучка. (b) - Распределение событий по трёхчастичной массе после применения всех обрезаний.

некоторая часть событий gun44 (весна 2012) установки ВЕС, ИФВЭ. Отбирались события содержащие одну вершину и три исходящих из неё трека. Один трек должен был быть положительным, а два других - отрицательными. События, содержащие помимо этого гамма-кванты, отбрасывались. Далее были наложены обрезания по упругому пику ( $27 \text{ ГэВ} < p_{beam} < 31 \text{ ГэВ}$ ) и по координатам вершины события ( $-224 \text{ см} < z < -219 \text{ см}$ ,  $(x + 2.67 \text{ см})^2 + (y + 3.2 \text{ см})^2 < 2.25^2 \text{ см}^2$ ). Для упрощения ПВА проводился в одном бине по  $t$ : от  $-0.02$  до  $-0.01$ . Как видно из распределения по  $t$  выбрана область, соответствующая рассеянию на ядре целиком. Подробнее про устройство установки можно прочитать в разделе 6.1.

## 4.2 $\pi^+\pi^-\pi^-$ : анализ

Ввиду нехватки времени была предпринята попытка провести ПВА на малой статистике. Ограничения по спину и моменту были взяты равными  $J_{max} = 2$  и  $l_{max} = 2$ . Исходя из [11], положительная натуральность доминирует, поэтому рассматривались только состояния с положительной натуральностью. Были вставлены изобары  $\rho(770)$  ( $m = 775 \text{ МэВ}$ ,  $\Gamma = 149 \text{ МэВ}$ ) и  $\sigma$  ( $m = 475 \text{ МэВ}$ ,  $\Gamma = 550 \text{ МэВ}$ ). Акцептанс считался

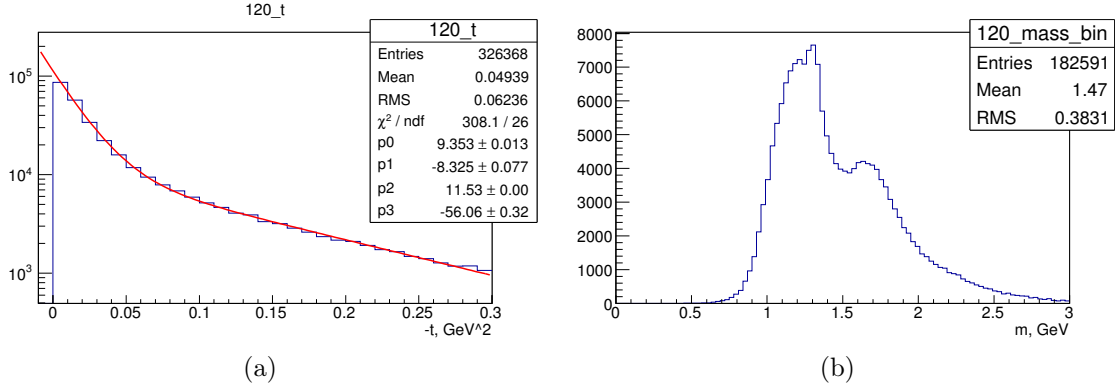


Рис. 4: (a) - Распределение событий по  $t$ . (b) - Распределение событий по трёхчастичной массе в выбранном бине по  $t$ .

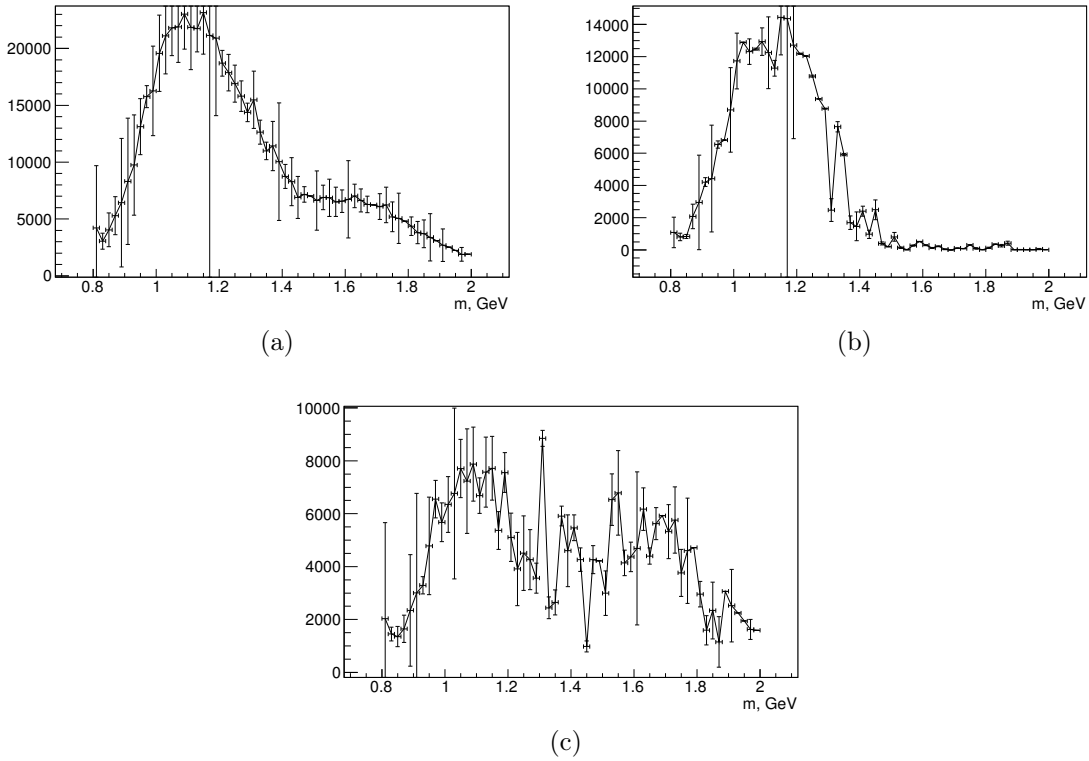


Рис. 5: (a) - Полученное распределение по трёхчастичной массе по сумме всех волн. (b) - Распределение событий по трёхчастичной массе в волне  $J^P \Lambda \eta l = 1^+ 0^+ 0$ . (c) - Распределение событий с  $J^P \neq 1^+$

в каждом бине по  $10^5$  событиям. Нормализация в каждом бине считалась на  $10^4$  событиях. Использовался минимизатор UOBYQA, алгоритм описан в [8], конкретная реализация в [7]. В полученных результатах доминирует волна  $1^+$  в которой виден резонанс  $a_1(1260)$ , как и должно быть согласно [11]. Данные приведены на гистограммах 5. Список использованных волн приведён в приложении 6.2. При попытке вставить состояния с отрицательной натуральностью результаты ухудшаются.

### 4.3 Прохождение известных волн

Результаты попытки провести анализ привели нас к следующему методу проверки. Генерировались распределения с заведомо известными элементами матрицы плотности, а затем с единичным аксептансом минимизировалась функция правдоподобия. Далее в тексте численные обозначения волн будут следующими:  $J^P \Lambda \eta$ , а под волной будет пониматься соответствующий элемент вектора, из которого составляется матрица плотности единичного ранга. В качестве заведомо известной конфигурации волн была взята конфигурация, в которой все волны равны 0 кроме  $1^+0^+$ , равной 0.707, и  $2^+1^+$ , равной  $i0.707$ .

Для  $10^3$  исходных событий и аксептанса  $10^4$ :

Волна Часть Значение Ошибка

$0^-0^+$	real	0.000000	0.000000
$0^-0^+$	imag	0.057788	0.019386
$1^+0^+$	real	-0.013904	0.332045
$1^+0^+$	imag	0.800042	0.020113
$1^-1^+$	real	0.013264	0.022617
$1^-1^+$	imag	0.001215	0.028896
$1^+1^+$	real	0.029995	0.024615
$1^+1^+$	imag	0.016971	0.031512
$2^-0^+$	real	-0.022045	0.041977
$2^-0^+$	imag	0.054205	0.023287
$2^-1^+$	real	0.092412	0.029694
$2^-1^+$	imag	-0.003419	0.043597
$2^+1^+$	real	-0.524880	0.103615
$2^+1^+$	imag	0.250788	0.215872

Для  $5 \cdot 10^4$  исходных событий и аксептанса  $10^5$ :

Волна Часть Значение Ошибка

$0^-0^+$	real	0.000000	0.000000
$0^-0^+$	imag	0.003102	0.006171
$1^+0^+$	real	0.824822	0.005288
$1^+0^+$	imag	0.125131	0.029691
$1^-1^+$	real	0.005687	0.003068
$1^-1^+$	imag	0.008068	0.004160
$1^+1^+$	real	-0.107930	0.010334
$1^+1^+$	imag	0.206355	0.005904
$2^-0^+$	real	0.000737	0.004366
$2^-0^+$	imag	0.005292	0.004626
$2^-1^+$	real	0.006949	0.003289
$2^-1^+$	imag	-0.002833	0.004310
$2^+1^+$	real	0.050881	0.015290
$2^+1^+$	imag	0.410663	0.004071

Как видно из приведённых результатов при увеличении статистики результаты улучшаются и ошибки фита становятся меньше. Но волна  $2^+1^+$  ввиду некой ошибки в программе “утекает” в волну  $1^+1^+$ .

## 5 Заключение

Программный комплекс написан и цикл его использования отлажен. Удалось получить разумный баланс между производительностью и гибкостью архитектуры программ. Также освоен формализм трёхчастичного ПВА, что являлось одной из целей выполнения этой работы. Программный комплекс частично работает, что видно по результатам ПВА при положительной натуральности. Но включение отрицательной натуральности ведёт к появлению ошибок, что является предметом дальнейшего изучения и исправления. Также, как показано в разделе 4.3, статистика играет серьёзную роль в получении правильных результатов, и её увеличение есть одно из направлений дальнейшего развития.

## 6 Приложение

### 6.1 Установка ВЕС

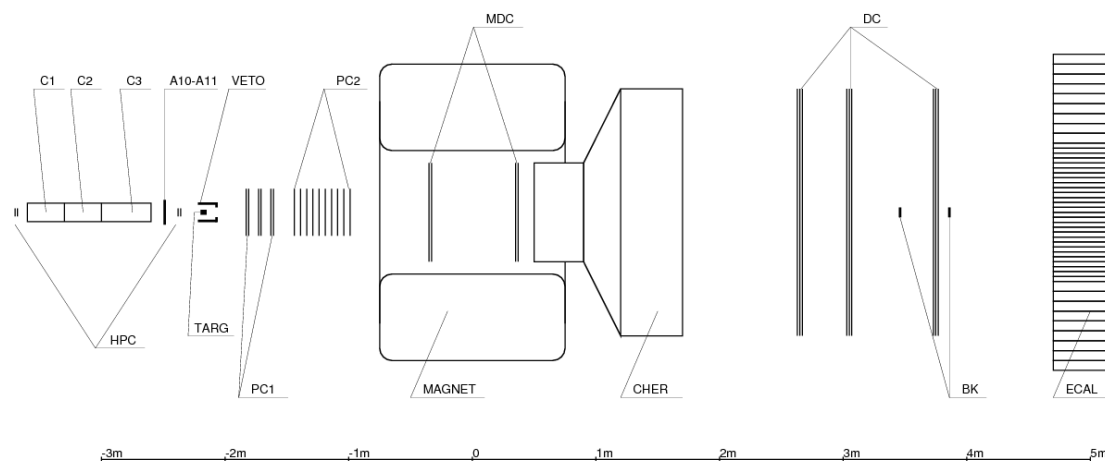


Рис. 6: Схема установки.

Установка ВЕС является широкоапертурным магнитным спектрометром, предназначенным для регистрации заряженных треков и  $\gamma$ -квантов, возникающих при взаимодействии пучковой частицы в фиксированной мишени. Принята система координат, в которой ось  $Y$  направлена вертикально вверх, ось  $Z$  - по пучку, а ось  $X$  дополняет тройку до правой. Начало расположено в центре магнита. На рисунке 6 изображено  $YZ$  сечение установки, пучковая часть изображена не в масштабе. Установка состоит из следующих детекторов:

1. Пучковые сцинтилляционные счётчики  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$  (на рисунке не показаны, расположены до мишени).
2. Пучковые черенковские счётчики  $C1$ ,  $C2$ ,  $C3$ .
3. Четыре двухплоскостные пучковые пропорциональные камеры  $HPC$ .
4. Счётчик  $A10-A11$  для подавления гало пучка. Представляет из себя пластину сцинтиллятора с вырезанным круглым отверстием.
5. Мишень  $TARG$ .
6. Охранная система  $VETO$ .
7. Сцинтилляционный счётчик  $S10-S11$ .
8. Группа пропорциональных камер  $PC1$ . Состоит из трёх двухплоскостных камер. Третья камера повернуть на угол  $15^\circ$  вокруг оси  $Z$ .
9. Группа пропорциональных камер  $PC2$ . Состоит из пяти двухплоскостных камер.



10. Магнит *MAGNET*.
11. Группа микродрейфовых камер внутри магнита *MDC*.
12. Большой многоканальный пороговый черенковский счётчик *CHER*.
13. Beam-killers *BK*.
14. Электромагнитный калориметр *ECAL*.

## 6.2 Волны, использованные в анализе

В данном приложении приводится список волн, использованных в ходе анализа.

$J^P \eta \Lambda \langle \text{isobar} \rangle$

$0^- + 01\rho$

$1^+ + 00\rho$

$1^+ + 02\rho$

$1^- + 11\rho$

$1^+ + 10\rho$

$1^+ + 12\rho$

$2^- + 01\rho$

$2^- + 11\rho$

$2^+ + 12\rho$

$0^- + 00\sigma$

$1^+ + 01\sigma$

$1^+ + 11\sigma$

$2^- + 02\sigma$

$2^- + 12\sigma$

## Список литературы

- [1] J. D. Hansen, G. T. Jones, G. Otter and G. Rudolph, Nucl. Phys. B **81**, 403 (1974).
- [2] F. Haas [COMPASS Collaboration], AIP Conf. Proc. **1374**, 273 (2011) [arXiv:1109.1789 [hep-ex]].
- [3] B. Liu [BESIII Collaboration], Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser. **31**, 1460306 (2014) [arXiv:1403.1337 [hep-ex]].
- [4] I. Kachaev, V. Dorofeev, A. Ekimov, V. Gotman, A. Ivashin, V. Kalendarev, Y. Khokhlov and M. Kholodenko *et al.*,
- [5] C. Zemach, Phys. Rev. **133**, B1201 (1964).
- [6] K. J. Peters, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 5618 (2006) [hep-ph/0412069].
- [7] Igor Kachaev, PWA tools and methods developed by VES group, Athos 2013.
- [8] Powell, M. J. D. (2002). "UOBYQA: unconstrained optimization by quadratic approximation". Mathematical Programming, Series B (Springer) **92**: 555–582.
- [9] <https://github.com/ROOTPWA-Maintainers/ROOTPWA>
- [10] Thomas F. Degener, TARA — An object-oriented program for a partial wave analysis of sequential two body decays, Computer Physics Communications, Volume 118, Issue 1, April 1999, Pages 34-48.
- [11] Y. Khokhlov, V. Dorofeev, A. Ekimov, V. Gotman, A. Ivashin, I. Kachaev, V. Kalendarev and M. Kholodenko *et al.*, PoS Hadron **2013**, 088 (2013).