

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
КАФЕДРА ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Магистерская диссертация

на тему:

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ РЕКОНСТРУКЦИИ
ВЕРШИН В ЭКСПЕРИМЕНТЕ “ВЕС” (ГНЦ ИФВЭ)

Выполнил: ст. гр. 524 Календарев В.В.

Научный руководитель: к. ф.-м. н. Хохлов Ю.А.

Рецензент: к. ф.-м. н. Уханов М.Н.

Протвино 2011

Содержание

1. Введение.....	3
2. Методы решения.....	4
2.1. Оценка параметров первичной вершины.....	4
2.2. Учет многократного рассеяния частиц на мишени.....	6
2.3. Алгоритм нахождения пути, пройденного частицей в мишени.....	8
2.4. Наложение связей на первичную вершину.....	11
2.5. Нахождение координат первичной вершины в процессе фитирования.....	12
2.6. Наложение связи на массу отдачи.....	13
2.7. Методы решения задачи нахождения условного экстремума.....	14
2.8. Алгоритм поиска вторичных вершин.....	18
3. Результаты.....	21
3.1. Точность определения координат первичной вершины.....	21
3.2. Результат наложения связей на первичную вершину и массу отдачи.....	23
3.3. Влияние материала мишени (многократного рассеяния на мишени) на результаты...26	
3.4. Зависимость результата от количества наложенных связей.....	29
3.5. Исследование работы алгоритма на данных 36-го сеанса эксперимента «ВЕС».....	30
3.6. Эффективность алгоритма поиска вторичных вершин на моделированных данных...31	
3.7. Поиск распадов вторичных К-мезонов в данных 36-го сеанса эксперимента «ВЕС».....	34
4. Заключение.....	39
5. Литература.....	40

1. Введение.

Эксперимент ВЕС (ускоритель У-70, ГНЦ ИФВЭ) был создан для исследования различного рода адронных реакций и представляет собой широкоапертурный магнитный спектрометр, регистрирующий заряженные треки и гамма-кванты, возникающие при взаимодействии пучковой частицы с фиксированной мишенью. Схема установки «ВЕС» представлена на рис 1.

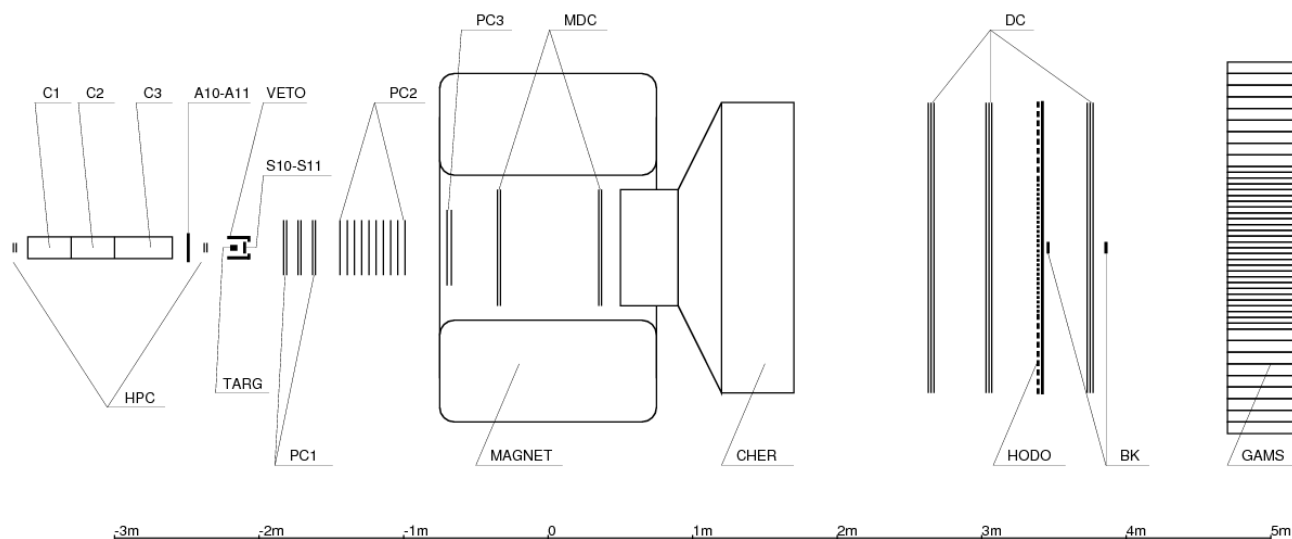


Рис.1. Схема установки «ВЕС». C1, C2, C3 — пучковые черенковские счетчики, A10, A11 — счетчики для подавления гало пучка, VETO — охранная система, TARG — мишень, PC1, PC2, PC3 — пропорциональные камеры, MDC — дрейфовые камеры, работающие в пропорциональном режиме, MAGNET — магнит, CHER — большой черенковский счетчик, DC — большие дрейфовые камеры, HODO — годоскоп, BK — сцинтилляционные счетчики для подавления непрореагировавшего пучка, GAMS — гамма-детектор.

Пучок с импульсом 27 ГэВ взаимодействует с неподвижной мишенью толщиной 10% ядерной длины. Вторичные частицы с импульсами порядка 10 ГэВ разлетаются под малыми углами к оси Z (на схеме ось Z направлена слева направо вдоль установки и примерно совпадает с траекторией движения пучковых частиц). Треки заряженных частиц, до попадания в магнитное поле представляющие собой прямые, после попадания в магнитное поле отклоняются, причем отклонение обратно пропорционально импульсу частиц. Установка позволяет измерять параметры пучковой частицы и вторичных заряженных частиц, а также параметры гамма-квантов.

Данная работа посвящена разработке алгоритмов реконструкции данных эксперимента ВЕС, а именно, алгоритмов нахождения первичных и вторичных вершин, алгоритмов улучшения экспериментальных данных с помощью имеющейся априорной информации о событиях, а также исследованию свойств перечисленных алгоритмов на реальных данных 36-го сеанса эксперимента ВЕС и на моделированных данных.

2. Методы решения

2.1. Оценка параметров первичной вершины

Рассмотрим события, в которых отсутствуют вторичные вершины, а траектории частиц представляют собой прямые. Из измерений нам известны параметры треков и обратные матрицы ковариаций (далее для краткости просто “матрицы ковариаций”) отдельно для каждого трека. Корреляция между параметрами разных треков мала и мы ей пренебрегаем.

Уравнения для i -го трека в принятой нами параметризации имеют вид

$$\begin{aligned} x &= (a_x)_i + (b_x)_i z \\ y &= (a_y)_i + (b_y)_i z \end{aligned}$$

В пространстве параметров (a, b) все треки, выходящие из одной вершины, должны лежать на одной прямой, причем

$$\begin{aligned} (a_x)_i &= -z_0 (b_x)_i + x_0 \\ (a_y)_i &= -z_0 (b_y)_i + y_0 \end{aligned}$$

где x_0, y_0, z_0 - координаты вершины. Эту прямую можно найти с помощью метода наименьших квадратов, принимая неизвестные координаты вершины в качестве параметров фита. Получим [1]

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\sum_i \frac{(a_x)_i}{(\sigma_x)_i^2} \sum_i \frac{(b_x)_i}{(\sigma_x)_i^2} - \sum_i \frac{(a_x)_i (b_x)_i}{(\sigma_x)_i^2} + \sum_i \frac{(a_y)_i}{(\sigma_y)_i^2} \sum_i \frac{(b_y)_i}{(\sigma_y)_i^2} - \sum_i \frac{(a_y)_i (b_y)_i}{(\sigma_y)_i^2}}{\sum_i \frac{1}{(\sigma_x)_i^2} \sum_i \frac{1}{(\sigma_y)_i^2} - \left(\sum_i \frac{(a_x)_i}{(\sigma_x)_i^2} \right)^2 - \left(\sum_i \frac{(a_y)_i}{(\sigma_y)_i^2} \right)^2}, \\ x_0 &= \frac{z_0 \sum_i \frac{(b_x)_i}{(\sigma_x)_i^2} + \sum_i \frac{(a_x)_i}{(\sigma_x)_i^2}}{\sum_i \frac{1}{(\sigma_x)_i^2}}, \\ y_0 &= \frac{z_0 \sum_i \frac{(b_y)_i}{(\sigma_y)_i^2} + \sum_i \frac{(a_y)_i}{(\sigma_y)_i^2}}{\sum_i \frac{1}{(\sigma_y)_i^2}}. \end{aligned}$$

σ_x, σ_y для каждого трека вычисляются с помощью соответствующей матрицы ковариаций по формулам переноса ошибок [2]

$$\sigma_x^2 = z^2 \sigma_{b_x}^2 + \sigma_{a_x}^2 + 2 \rho_{a_x b_x} z ,$$

$$\sigma_y^2 = z^2 \sigma_{b_y}^2 + \sigma_{a_y}^2 + 2 \rho_{a_y b_y} z .$$

Входящие в формулы дисперсии треков σ_x, σ_y не являются постоянными величинами, они зависят от искомой координаты z_0 , поэтому используется итерационный метод нахождения первичной вершины. В качестве начального приближения полагается

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 1 \\ \sigma_y &= 1 \end{aligned} .$$

С приемлемой точностью координаты вершины находятся в нашем случае за три-четыре итерации. На случай расходящегося или плохо сходящегося итерационного процесса в алгоритме ставится ограничение на количество итераций (максимум десять итераций).

Для двухчастичных событий, в которых точности измерения треков отличаются незначительно, уже начальное приближение дает хороший результат.

Если известны параметры треков налетающих частиц (пучка), то их треки могут быть включены на равных с треками образовавшихся частиц. Точность нахождения координат первичной вершины при этом существенно повышается, так как параметры трека пучковой частицы в эксперименте «ВЕС» известны с большей точностью, чем параметры треков вторичных частиц.

Найденная таким образом вершина является одной из возможных оценок (в смысле математической статистики) параметров истинной вершины.

2.2. Учет многократного рассеяния частиц на мишени

На точность координат первичной вершины существенно влияет многократное рассеяние частиц на материале мишени, особенно при использовании в качестве мишени плотных веществ. Нахождение детерминированной поправки к вершине для каждого события за счет учета многократного рассеяния невозможно – многократное рассеяние является случайным процессом. Однако можно найти вклад многократного рассеяния в матрицу ковариаций трека. Т. е. трекам с меньшей энергией, сильнее рассеивающимся в мишени, будет приписана большая величина дисперсии, что в целом даст положительный эффект.

В данной работе учет многократного рассеяния сведен к добавке в матрицу ошибок для треков матрицы ошибок для многократного рассеяния. Это есть просто сумма, так как рассеяние на мишени дает независимый вклад в общую погрешность измерений.

Матрица ошибок для многократного рассеяния считается исходя из формулы [3]

$$\Theta_s^2 = \left(\frac{E_s}{\beta c p} \right)^2 \frac{1}{X_0}$$

Θ_s - это величина дисперсии угла при прохождении единичного пути в мишени. Дисперсия угла при прохождении малого расстояния dx в мишени равна

$$d\sigma_\Theta^2 = \Theta_s^2 dx$$

Постоянная E_s и радиационная длина X_0 берутся из справочника [3]. Скорость $\beta \simeq 1$, импульс p известен из измерений.

Конкретный вид матрицы ошибок зависит от параметризации. Приращения параметров трека da_x, db_x, da_y, db_y при прохождении частицей пути dx в мишени ищутся как функции приращения угла рассеяния $d\Theta$ - независимой случайной величины с известной дисперсией $d\sigma_\Theta^2$. Зная эти функции, матрица ошибок находится с помощью формулы переноса ошибок. Считаем, что при рассеянии импульс по модулю остается неизменным, а меняется только направление движения частицы. Связь малых изменений параметров трека с малым изменением угла рассеяния можно найти геометрически.

Положим, что рассеяние по оси x и y происходит независимо (в нашем случае зависимость есть, но она слабая и ей можно пренебречь). Тогда при малых углах рассеяния

$$(\Theta_s)_x^2 = \frac{1}{2} \Theta_s^2 \quad \text{и} \quad (\Theta_s)_y^2 = \frac{1}{2} \Theta_s^2$$

Чтобы получить величины для конечного пути, нужно взять интеграл. В используемой нами параметризации для i -го трека искомая матрица ошибок имеет вид (для конечного пути)

$$(D_t)_i = 0.0136^2 \cdot \begin{pmatrix} ((z_2)_i - (z_1)_i) f_x & 0 & -\left(\frac{(z_2)_i^2 - (z_1)_i^2}{2}\right) f_x & 0 & 0 \\ 0 & ((z_2)_i - (z_1)_i) f_y & 0 & -\left(\frac{(z_2)_i^2 - (z_1)_i^2}{2}\right) f_y & 0 \\ -\left(\frac{(z_2)_i^2 - (z_1)_i^2}{2}\right) f_x & 0 & \left(\frac{(z_2)_i^3 - (z_1)_i^3}{3}\right) f_x & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{(z_2)_i^2 - (z_1)_i^2}{2}\right) f_y & 0 & \left(\frac{(z_2)_i^3 - (z_1)_i^3}{3}\right) f_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

где $f_x = (1 + (b_x)_i^2)^2 \frac{1}{p_i^2} \frac{1}{X_0}$ и $f_y = (1 + (b_y)_i^2)^2 \frac{1}{p_i^2} \frac{1}{X_0}$.

Здесь z_1 - координата точки входа трека в мишень, если вершина события находится за пределами мишени и образовавшаяся частица прошла сквозь мишень, либо вершина события, если событие произошло внутри мишени; z_2 - точка выхода трека из мишени. Если данный трек не проходил через мишень, то матрица ошибок многократного рассеяния для него считается равной нулю.

Матрица ошибок зависит от начала отсчета z_0 . Это связано с тем, что в выбранной нами параметризации треков значения параметров сами зависят от начала отсчета по оси z , что обеспечивает независимость величины рассеяния трека в мишени от выбора системы отсчета. Поэтому никакой ошибки тут нет, как может показаться на первый взгляд.

2.3. Алгоритм нахождения пути, пройденного частицей в мишени.

Подробное описание этого алгоритма важно для понимания работы функции, вычисляющей z_1 и z_2 .

В силу того, что мишень имеет правильную цилиндрическую форму, существует возможность найти z_1 и z_2 и путь, пройденный частицей в мишени, с помощью формул, не используя численные методы, что экономит время при вычислениях. Трудность заключается в том, что в зависимости от параметров трека точка входа/выхода трека может лежать либо на поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, либо в плоскостях $z = -220 - L/2$ и $z = -220 + L/2$. Из-за этого невозможно найти эти точки просто решив уравнения. Необходимо проверить некоторые условия, чтобы определить положения точек.

Обозначим: $Z_0 = -220$ - это центр мишени, R - ее радиус, L - высота мишени (высота цилиндра).

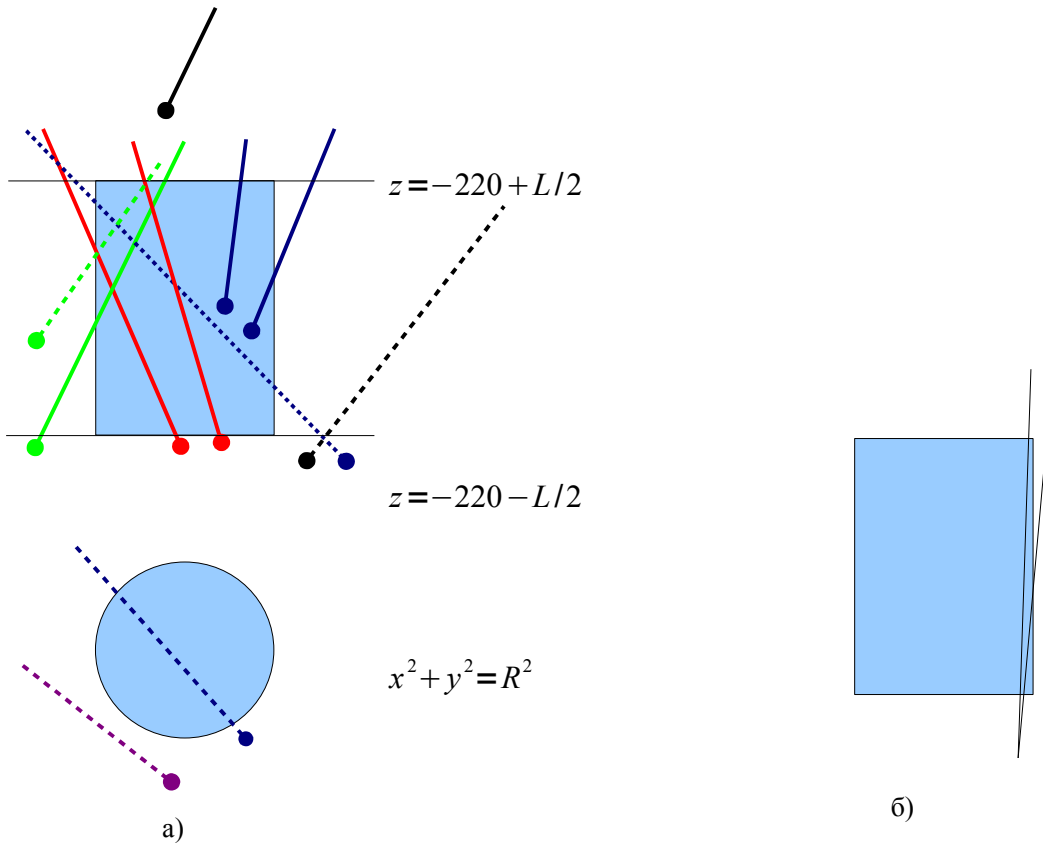


Рис. 2. Возможные пути прохождения частицы сквозь мишень.

1. Очевидно, что если координата вершины $z_0 > -220 + L/2$, то частица не пересекает мишень (черная сплошная линия на рис. 2а).
2. В случае отрицательного дискриминанта $D = (a_x b_x + a_y b_y)^2 - (b_x^2 + b_y^2)(a_x^2 + a_y^2 - R^2)$ трек также не пересекает мишень (пунктирная фиолетовая линия на рис. 2а).

3. Если $z_0 < -220 - L/2$, то найдем значения координат (x, y) трека при $z_0 = -220 - L/2$, так как в этом случае $z_1 \geq z_0$ (сплошная зеленая и красные линии на рис. 2а).

1. Теперь если $x_0^2 + y_0^2 > R^2$, то z_1 находится из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ x &= a_x + b_x z \\ y &= a_y + b_y z \end{aligned}$$

Нам нужно решение с $-\sqrt{D}$ (сплошная зеленая линия на рис. 2а):

$$z = \frac{-(a_x b_x + a_y b_y) - \sqrt{D}}{b_x^2 + b_y^2},$$

где $D = (a_x b_x + a_y b_y)^2 - (b_x^2 + b_y^2)(a_x^2 + a_y^2 - R^2)$.

1. Если $z < -220 - L/2$, то это, очевидно, соответствует случаю, изображенному на рис. 1а черной пунктирной линией, то есть трек не пересекает мишень.

2. Если $z \geq -220 - L/2$, то (синяя пунктирная линия на рис. 2а)

$$z_1 = z.$$

2. Если $x_0^2 + y_0^2 \leq R^2$, то

$$z_1 = -220 - L/2.$$

4. Если при выполнении предыдущих пунктов координата z_1 не была найдена (трек не подпал под условия предыдущих пунктов) и имеет место $-220 - L/2 \leq z_0 \leq -220 + L/2$ и $x_0^2 + y_0^2 \leq R^2$, то вершина события находится внутри мишени и $z_1 = z_0$ (сплошные синие линии на рис. 2а). Для того, чтобы в этом случае найти z_2 , нужно вычислить значения координат (x, y) трека при $z = -220 + L/2$.

1. Если в точке $-220 + L/2$ будет выполняться соотношение $x^2 + y^2 \leq R^2$, то из рис. 1а видно, что $z_2 = -220 + L/2$ т. е. z_2 лежит в плоскости $z = -220 + L/2$.

2. В противном случае z_2 лежит на поверхности цилиндра и находится из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ x &= a_x + b_x z \\ y &= a_y + b_y z \end{aligned}$$

Решение имеет вид (нам нужно, очевидно, решение с $+\sqrt{D}$)

$$z = \frac{-(a_x b_x + a_y b_y) + \sqrt{D}}{b_x^2 + b_y^2},$$

где $D = (a_x b_x + a_y b_y)^2 - (b_x^2 + b_y^2)(a_x^2 + a_y^2 - R^2)$.

Если положить при $z_0 \geq -220 - L/2$ $z_1 = z_0$ (или $z_1 = -220 - L/2$ при $z_0 < -220 - L/2$), а $z_2 = -220 + L/2$, то это будет отличным приближением. Разница в длине пробега частицы в мишени между этим приближением и точным значением будет порядка $\sin(\alpha)$, где α - угол между осью z и треком. Этот угол малый.

Для треков, проходящих вблизи и почти параллельно боковой поверхности мишени даже небольшое изменение угла может вызвать сильное изменение длины пробега (см. рис. 1б). Но, во-первых, доля таких частиц невелика, в нашем случае порядка $\sin(\alpha)$, во-вторых, для таких частиц сильный вклад в ошибку длины пробега вносят погрешности измерения параметров треков. Тем не менее в программе использован точный расчет длины пробега частицы в мишени.

2.4. Наложение связей на первичную вершину.

Для нахождения поправок к параметрам треков используем наложение связи (констрейнт) на вершину. Нам заведомо известно, что треки для одного события, не содержащего вторичных вершин, должны исходить из одной точки – первичной вершины с координатами $\{x_{vrtx}, y_{vrtx}, z_{vrtx}\}$. Это по сути есть улучшение экспериментальных данных с помощью априорной информации [4].

Погрешности измерений приводят к тому, что треки для одного события, полученные из измерений, не пересекаются в одной вершине. Потребуем, чтобы после нахождения поправок к параметрам треков они исходили из одной вершины (мы рассматриваем события, не содержащие вторичных вершин). Это требование налагает $2N$ связей на поправки, где N - число треков в событии (с учетом пучка). Связи имеют вид

$$\begin{aligned} x_{vrtx} &= (a_x)_i + (\delta a_x)_i + ((b_x)_i + (\delta b_x)_i) z_{vrtx} \\ y_{vrtx} &= (a_y)_i + (\delta a_y)_i + ((b_y)_i + (\delta b_y)_i) z_{vrtx} \end{aligned}$$

где $i=1,2,\dots,N$ - номера треков, $\delta a_x, \delta b_x, \dots$ - поправки к трекам. После наложения связей изменятся все пять параметров каждого трека, включая импульс (за счет корреляции с другими параметрами трека). Т. о., мы имеем $5N$ неизвестных.

Полученная система уравнений не замкнутая. Потребуем, чтобы поправки были такие, чтобы величина

$$\chi^2 = \sum_{i,j} C_{ij} x_i x_j$$

была минимальной, где x_i, x_j - поправки параметров треков, C_{ij} - матрица $5N \times 5N$ ковариаций всех N треков:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & C_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

C_i - матрица 5×5 ковариаций i -го трека, в которой учтено многократное рассеяние на мишени. Тем самым получаем недостающие для замыкания системы уравнения.

2.5. Нахождение координат первичной вершины в процессе фитирования.

Приведенные выше уравнения связей содержат в качестве неизвестных координаты первичной вершины $\{x_{vrtx}, y_{vrtx}, z_{vrtx}\}$, причем они входят в уравнения нелинейно (неизвестные $\{x_{vrtx}, y_{vrtx}, z_{vrtx}\}$ можно исключить из системы, но это неудобно на практике, к тому же система все равно останется нелинейной). Решая полученную систему уравнений, мы одновременно находим и первичную вершину и поправки к параметрам треков.

Однако решение нелинейной системы уравнений является довольно непростой задачей. В нашем случае существует возможность избавиться от нелинейности. Для этого мы сперва найдем оценку координат первичной вершины $\{x_0, y_0, z_0\}$ методом наименьших квадратов (см. раздел 2.1.). Истинные значения координат первичной вершины отличаются от их оценки на малые величины $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$. Тогда уравнения связей примут вид:

$$\begin{aligned}x_0 + \delta x_0 &= (a_x)_i + (\delta a_x)_i + ((b_x)_i + (\delta b_x)_i)(z_0 + \delta z_0) \\y_0 + \delta y_0 &= (a_y)_i + (\delta a_y)_i + ((b_y)_i + (\delta b_y)_i)(z_0 + \delta z_0)\end{aligned}$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малостями второго порядка, получим линейные уравнения связей и, следовательно, задача становится линейной.

Параметры $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ можно выразить через другие неизвестные и таким образом исключить их из уравнений связей, что, приведет к уменьшению количества связей. Если мы примем оценку $\{x_0, y_0, z_0\}$ в качестве истинных значений координат первичной вершины, то мы избавимся от трех неизвестных величин $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ и, следовательно, будем иметь большее количество связей. В общем случае наложение менее жестких связей снижает результативность. Но результативность зависит не только от количества налагаемых связей, но также и от того, существует ли в действительности наложенная связь. По этой причине принятие оценки $\{x_0, y_0, z_0\}$ в качестве истинных значений координат вершины не является предпочтительным.

2.6. Наложение связи на массу отдачи.

В ряде случаев есть основания использовать априорную информацию о том, что налетающая частица взаимодействует с отдельным нуклоном, а не с ядром в целом, поэтому мы вправе требовать, чтобы масса отдачи была равна массе протона и можем наложить соответствующую связь. Уравнение такой связи будет иметь вид

$$M_{rec}^2 = m_p^2 = \left((E_{beam} + \delta E_{beam}) + m_p - (E_{tot} + \delta E_{tot}) \right)^2 - \left(P_{rec}^2 + \delta P_{rec}^2 \right)$$

Здесь E_{beam} - энергия пучковой (налетающей) частицы, E_{tot} - сумма энергий образовавшихся частиц, P_{rec} - импульс отдачи. Мы положили, что налетающая частица взаимодействует отдельно с каждым протоном или нейтроном мишени, но не с ядром в целом. При импульсе отдачи более 0,1 ГэВ это является справедливым. Импульс отдачи находится через разность импульса пучковой частицы и суммы импульсов вторичных частиц. Все величины, имеющиеся в уравнении для связи на массу отдачи, являются функциями параметров треков. Однако явное выражение через эти параметры громоздко и мы его приводить не будем. Пренебрегая малостями второго порядка, можно получить линейное уравнение для связи на массу отдачи.

2.7. Методы решения задачи нахождения условного экстремума

Задача нахождения поправок к параметрам треков является задачей на нахождение условного экстремума.

Задача может быть решена методом множителей Лагранжа [5]. Пусть $f(x_i)=0$ - функция от N переменных, минимум которой нужно найти при M условиях (связях) $\phi_j(x_i)=0$, $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$, $N > M$. Тогда необходимое условие экстремума имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(f(x_i) + \sum_j \lambda_j \phi_j(x_i) \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \left(f(x_i) + \sum_j \lambda_j \phi_j(x_i) \right) = 0, \quad k=1, \dots, N, \quad m=1, \dots, M.$$

где λ_i - множители Лагранжа.

В линейном случае метод множителей Лагранжа можно представить в матричной форме. Для нашей конкретной задачи если обозначить матрицу связей через F , правую часть уравнений связей (вектор) через \vec{b} , матрицу ковариаций параметров всех треков и поправок к координатам вершины через C , то в матричном виде метод множителей Лагранжа запишется в виде

$$\begin{pmatrix} F & 0 \\ C & F^T \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{x} = \{(\delta b_x)_i, (\delta b_y)_i, (\delta a_x)_i, (\delta a_y)_i, (\delta p)_i, \dots, \lambda_j\}^T$.

Элементы матрицы C , соответствующие поправкам к координатам вершины, равны нулю, так как поправки к координатам вершины явно не входят в минимизируемую величину χ^2 .

Решая систему, получим интересующие нас поправки, а также множители Лагранжа.

Для решаемой нами задачи метод множителей Лагранжа обладает рядом недостатков. Во-первых, кроме интересующих нас поправок находятся множители Лагранжа, которые нам совершенно не нужны. Для события с N треками и M связями система уравнений при использовании метода множителей Лагранжа будет иметь порядок $5(N+2M)$. При большом количестве связей такой вклад множителей Лагранжа в порядок системы становится ощутимым. В нашем случае число неизвестных становится примерно на 40% больше, чем число искомым поправок к параметрам треков.

Во-вторых, и это главное, именно для нашей задачи применение метода множителей Лагранжа приводит к плохо обусловленным системам. Число обусловленности полученной в методе Лагранжа матрицы имеет порядок $k=10^{13}$. Это означает, что при машинной точности $\varepsilon=10^{-15}$, соответствующей формату представления чисел с плавающей точкой *double*, точность полученного решения без применения специальных алгоритмов решения подобных систем будет [6]

$$k \varepsilon = 10^{-2},$$

что является неприемлемым, особенно учитывая, что это только характеристическое число. Для данного конкретного решения x_i точность может меняться как угодно, причем как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения. Плохая обусловленность возникает из-за того, что коэффициенты при неизвестных множителях Лагранжа (т. е. элементы матрицы F) имеют величину, в некоторых случаях на десять-двенадцать порядков отличающуюся от величины коэффициентов при неизвестных параметрах треков (элементов матрицы C). Причем порядок

самих множителей Лагранжа совпадает с порядком искомым поправок, а это означает, что масштабированием множителей Лагранжа проблему не решить.

Чтобы обойти эту проблему применен метод нахождения условного экстремума, в котором любые $(N - M)$ параметров считаются независимыми, а остальные параметры рассматриваются как функции этих независимых параметров. Зависимость параметров возникает за счет наложения связей и однозначно определяется ими. В отличие от метода множителей Лагранжа данный метод не симметричный и реализуется значительно сложнее. С другой стороны он не приводит к плохой обусловленности матриц и расчет этим методом происходит существенно быстрее по сравнению с методом Лагранжа, особенно с ростом числа связей и искомым параметров, так как в данном методе не нужно дополнительно находить множители Лагранжа. К тому же менее жесткая система линейных уравнений решается быстрее по сравнению с более жесткой при одинаковом порядке систем.

В случае, когда минимизируемая функция представляет собой квадратичную форму и связи, налагаемые на переменные, линейные, данный метод нахождения условного экстремума сводится к системе линейных уравнений и его можно компактно записать в матричном виде. Это облегчает программную реализацию метода.

Получим компактную матричную запись несимметричного метода нахождения условного экстремума. Пусть первые M переменных зависимы от остальных переменных (так как имеется M связей, налагаемых на все N переменных). В качестве независимых переменных можно выбрать, как окажется ниже, не любые переменные, однако переобозначением переменных и соответствующих им коэффициентов ковариации (т. е. перестановкой столбцов матриц) всегда можно добиться, чтобы первые M переменных можно было считать зависимыми от остальных переменных. То есть, мы положим

$$x_i = x_i(x_{M+1}, \dots, x_N) \quad , \quad i = 1, \dots, M \quad .$$

Тогда необходимое условие экстремума для функции многих переменных примет вид

$$\sum_{i,j} C_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + \sum_{i,j} C_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j = 2 \sum_{i,j} C_{i,j} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = 0 \quad , \quad i, j = 1, \dots, N \quad , \quad k = M+1, \dots, N \quad .$$

При преобразовании использовано свойство симметричности матрицы ковариаций

$$C_{ij} = C_{ji} \quad .$$

В матричной форме это условие экстремума примет вид (на двойку сократим)

$$(C \cdot D)^T = 0 \quad .$$

$$D_{i,k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \quad - \text{ матрица производных.}$$

Получили систему из $(N - M)$ уравнений. Присоединяя к ним M уравнений связей, получим замкнутую систему N уравнений, решая которую, найдем интересующие нас поправки.

Производные $\frac{\partial x_i}{\partial x_k}$ полностью определяются уравнениями связей (ниже показано, что это справедливо при выполнении некоторого условия). Очевидно, что для независимых переменных имеем

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_k^i, \quad i, k = M+1, \dots, N.$$

Для получения производной $\frac{\partial x_i}{\partial x_k}$ при $i=1, \dots, M$ и $k=M+1, N$ продифференцируем уравнения связей по $\frac{\partial}{\partial x_k}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F_{ij} x_j = F_{i1} \frac{\partial x_1}{\partial x_k} + F_{i2} \frac{\partial x_2}{\partial x_k} + \dots + F_{iM} \frac{\partial x_M}{\partial x_k} + F_{ik} = 0,$$

где $i=1, \dots, M$, $j=1, \dots, N$, $k=M+1, N$, F – матрица коэффициентов уравнений связей.

Мы получили M систем линейных уравнений, отличающихся правой частью. Для их решения достаточно один раз найти обратную матрицу. В матричном виде эти системы записываются таким образом

$$D_0 = -B_1^{-1} \cdot B_2.$$

B_1 – квадратная матрица $M \times M$, B_2 – матрица размерности $M \times (N-M)$, причем

$$F = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь накладывается требование, чтобы

$$\det(B_1) \neq 0.$$

Это означает, что не любые переменные можно выбрать в качестве независимых, о чем говорилось выше. Столбцы и строки матрицы B_1 должны быть линейно независимыми.

Для того, чтобы понять, откуда берутся такие ограничения, приведем простой пример, не имеющий к нашей задаче прямого отношения. Пусть задача на условный экстремум имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_4)}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned}.$$

Тогда мы не можем выразить переменные x_3 и x_4 через x_1 и x_2 не используя дополнительно необходимые условия минимума для функции $f(x_1, \dots, x_4)$. Т. е., если мы хотим упростить задачу и потребовать, чтобы производные $\frac{\partial x_i}{\partial x_k}$ полностью определялись уравнениями связей (однозначно определялись элементами матрицы связей в линейном случае), то мы обнаружим что это возможно только при таком выборе переменных, при котором выполняется найденное нами условие неравенства нулю определителя матрицы B_1 . В нашей задаче есть связи на переменные по оси X и по оси Y , которые не выражаются друг через друга в силу независимости X - и Y -параметров треков друг от друга в нашей параметризации. Поэтому мы вынуждены решить проблему выбора независимых переменных.

Для того чтобы выбрать, какие из переменных принять за независимые, нужно привести матрицу связей к треугольному виду, что не отразится на решениях. После этого она будет выглядеть, например, следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

При преобразовании к треугольному виду нулевой столбец пропускается. Мы видим, что первый, второй и четвертый столбец линейно независимы, определитель матрицы, построенный из них, не будет равен нулю. Следовательно, неизвестные x_1, x_2, x_4 можно рассматривать как функции остальных переменных. По этой же причине в качестве функций независимых переменных можно взять x_1, x_2, x_5 и т. д..

Подобным образом нужно действовать в общем случае. Чтобы индексы параметров, принятых как функции других параметров, начинались от первого номера и шли по порядку, нужно произвести перестановку столбцов в матрице коэффициентов уравнений связей и соответствующие перестановки в матрице ковариаций. На практике все манипуляции по перестановке строк или столбцов матрицы производятся конечно же с указателями на них.

Из приведенного примера видно, что если уравнения связей линейно независимы, то всегда найдутся параметры, которые можно рассматривать как функции других параметров.

Запишем еще раз последовательность нахождения условного экстремума данным методом

$$F = (B_1 \ B_2) , \quad D_0 = -B_1^{-1} \cdot B_2 , \quad D = \begin{pmatrix} D_0 \\ E \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} F \\ (C \cdot D)^T \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

E – единичная матрица соответствующей размерности, \vec{b} – правая часть уравнений связей.

Видно, что в строках $(C \cdot D)^T = 0$, имеющих большой порядок коэффициентов, можно вынести за скобки и сократить общие множители высокого (10^8) порядка. Тогда коэффициенты в строках станут порядка единицы. То есть мы избавились от жесткости (в общем случае коэффициенты системы порядка единицы не гарантируют отсутствие жесткости системы, однако у нас это так).

2.8. Алгоритм поиска вторичных вершин.

Идея алгоритма поиска вторичных вершин заключается в использовании следующего свойства. Пусть, например, мы имеем событие с вторичной вершиной и из вторичной вершины исходят два трека. Тогда прямая, параллельная вектору суммы импульсов частиц вторичной вершины и проходящая через вторичную вершину должна проходить и через первичную вершину (см. рис. 3)

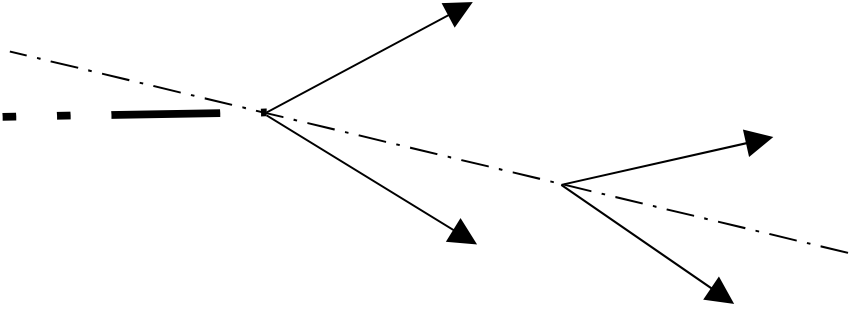


Рис. 3. Пример события со вторичной вершиной.

Это дает две дополнительные связи в первичной вершине на каждую вторичную вершину. Если мы параметризуем представленную на рис. 3. пунктирную линию, соответствующую траектории нейтральной частицы, так же как и треки, то связи примут следующий математический вид:

$$b_{x\,neutral} + \delta b_{x\,neutral} = \frac{x_{sec} - x_{pr}}{z_{sec} - z_{pr}}, \quad b_{y\,neutral} + \delta b_{y\,neutral} = \frac{y_{sec} - y_{pr}}{z_{sec} - z_{pr}},$$

где $x_{pr}, z_{pr}, x_{sec}, z_{sec}$ - соответствующие координаты первичной и вторичной вершины, $b_{x\,neutral}, b_{y\,neutral}$ - параметры «трека» нейтральной частицы. Параметры и поправки к параметрам «трека» нейтральной частицы выражаются через параметры и поправки к параметрам треков частиц вторичной вершины. Учитывая малость неизвестных поправок уравнения можно преобразовать так, что все неизвестные будут входить линейным образом. Для этого нужно расписать $\delta b_{x\,neutral}, \delta b_{y\,neutral}$ как дифференциалы от $b_{x\,neutral}, b_{y\,neutral}$. Выражения довольно громоздки, поэтому мы их приводить не будем.

Одновременно с этими связями налагаются связи на первичную и вторичную вершину (в зависимости от принадлежности трека к той или иной вершине), а также связь на массу отдачи (либо без наложения связи на массу отдачи). Алгоритм позволяет распознавать события, содержащие более одной вторичной вершины.

При наложении приведенных связей можно использовать оценку координат вершин, полученную методом наименьших квадратов, в качестве истинного значения их координат. Тогда правые части в этих связях будут постоянными величинами. Можно также вводить неизвестные заранее поправки к оценке координат вершин. Либо вводить неизвестные поправки к оценке координат только для первичной, либо только для вторичной вершины. При введении поправок к координатам вершин, правые части в уравнениях оказываются нелинейными:

$$b_{x\,neutral} + \delta b_{x\,neutral} = \frac{(x_{sec} + \delta x_{sec}) - (x_{pr} + \delta x_{pr})}{(z_{sec} + \delta z_{sec}) - (z_{pr} + \delta z_{pr})}, \quad b_{y\,neutral} + \delta b_{y\,neutral} = \frac{(y_{sec} + \delta y_{sec}) - (y_{pr} + \delta y_{pr})}{(z_{sec} + \delta z_{sec}) - (z_{pr} + \delta z_{pr})}.$$

Будем считать, что расстояние между первичной и вторичной вершиной много больше, чем величина поправок к оценке координат этих вершин. Это предположение оправдано, так как только в этом случае существует возможность отделить первичную вершину от вторичной. Тогда уравнения можно привести к линейному виду с помощью разложения в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x .$$

Пренебрегая малостями второго порядка получим в итоге линейные уравнения

$$b_{x\,neutral} + \delta b_{x\,neutral} = \frac{x_{sec} - x_{pr}}{z_{sec} - z_{pr}} + \frac{1}{z_{sec} - z_{pr}} \delta x_{sec} - \frac{1}{z_{sec} - z_{pr}} \delta x_{pr} + \frac{x_{sec} - x_{pr}}{(z_{sec} - z_{pr})^2} \delta z_{sec} - \frac{x_{sec} - x_{pr}}{(z_{sec} - z_{pr})^2} \delta z_{pr}$$

$$b_{y\,neutral} + \delta b_{y\,neutral} = \frac{y_{sec} - y_{pr}}{z_{sec} - z_{pr}} + \frac{1}{z_{sec} - z_{pr}} \delta y_{sec} - \frac{1}{z_{sec} - z_{pr}} \delta y_{pr} + \frac{y_{sec} - y_{pr}}{(z_{sec} - z_{pr})^2} \delta z_{sec} - \frac{y_{sec} - y_{pr}}{(z_{sec} - z_{pr})^2} \delta z_{pr}$$

Выдвигаются всевозможные гипотезы относительно принадлежности каждого трека к той или иной вершине (рис. 4). Налагается условие, что в каждой вершине более одного трека (иначе невозможно определить координаты вершины). Если позволяет число треков, то выдвигаются гипотезы, в которых более одной вторичной вершины. Наименьшее число вторичных треков, позволяющее выдвинуть гипотезу о существовании в событии вторичной вершины, равно трем, так как равноправно с вторичными треками включается пучковый трек (см. рис 5). Наиболее правдоподобная гипотеза выбирается из критерия

$$\chi^2 = \sum_{i,j} C_{ij} x_i x_j ,$$

где x_i, x_j – поправки к параметрам треков, которые необходимо ввести для того чтобы преобразовать событие к виду, изображенному на рис. 2.

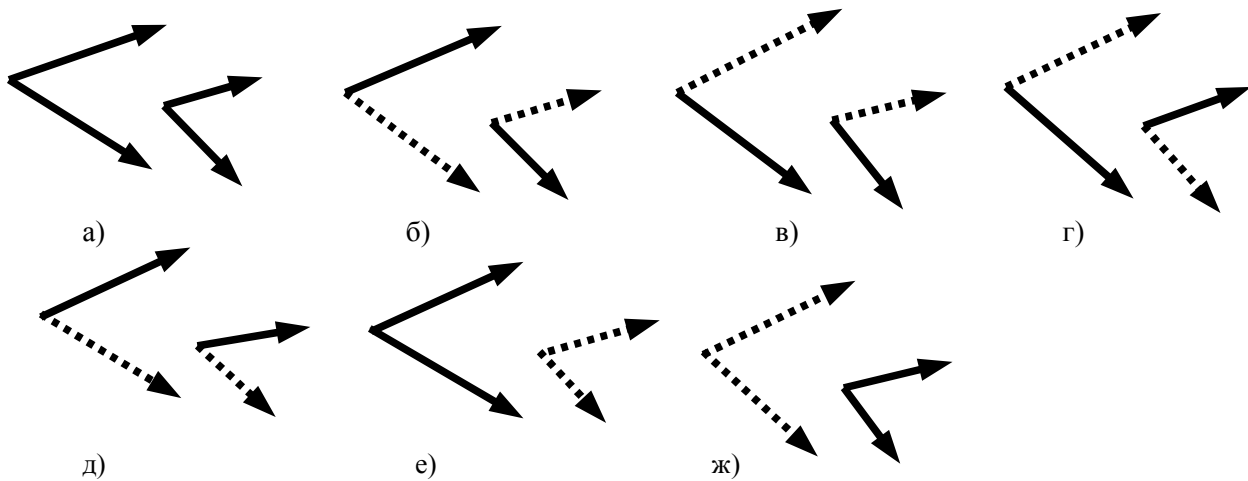


Рис. 4. Всевозможные гипотезы (сплошная линия – трек принадлежит к первичной вершине, пунктирная – ко вторичной).

Так как в эксперименте «ВЕС» доля событий с большим количеством треков мала, то большое количество гипотез, которое приходится выдвигать при поиске вторичных вершин в таких событиях, практически не сказывается на общей скорости обработки экспериментальных данных.

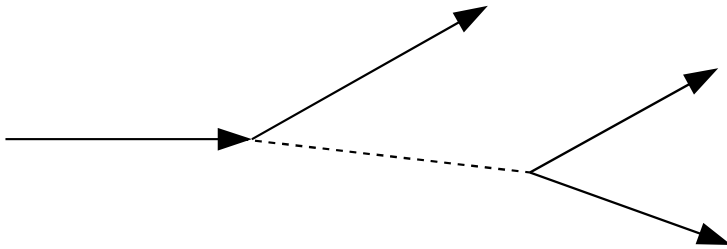


Рис. 5. Событие с минимальным количеством треков, содержащее вторичную вершину.

Алгоритм может обнаружить отсутствие вторичной вершины в событиях подобных примеру на рис. 6. Из-за погрешности измерений такое событие, не содержащее вторичных вершин, казалось бы можно интерпретировать как событие со вторичной вершиной, но в нем почти всегда не выполняется приведенное на рис. 3 свойство событий с вторичными вершинами. Даже без наложения ограничений на расстояние между первичной и вторичной вершиной события, подобные этому, правильно распознаются.

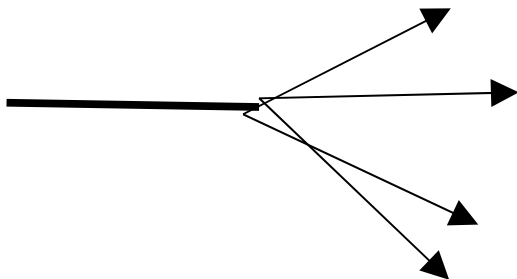


Рис. 6. Пример события, внешне похожего на событие с вторичной вершиной.

Однако, события с настоящими вторичными вершинами, расположенными очень близко (несколько сигм) к первичной вершине, распознаются как не содержащие вторичных вершин. Т. е. использование этого алгоритма не может заменить точных измерений параметров треков.

3. Результаты.

3.1. Точность определения координат первичной вершины

Ниже показано распределение значений координат первичной вершины, полученных методом наименьших квадратов и после наложения связей на первичную вершину для моделированных двухтрековых (не считая пучкового трека) событий при энергии пучка 27 ГэВ. Истинное значение координат первичной вершины для всех моделированных событий $x=0$, $y=0$, $z=-220$ см.

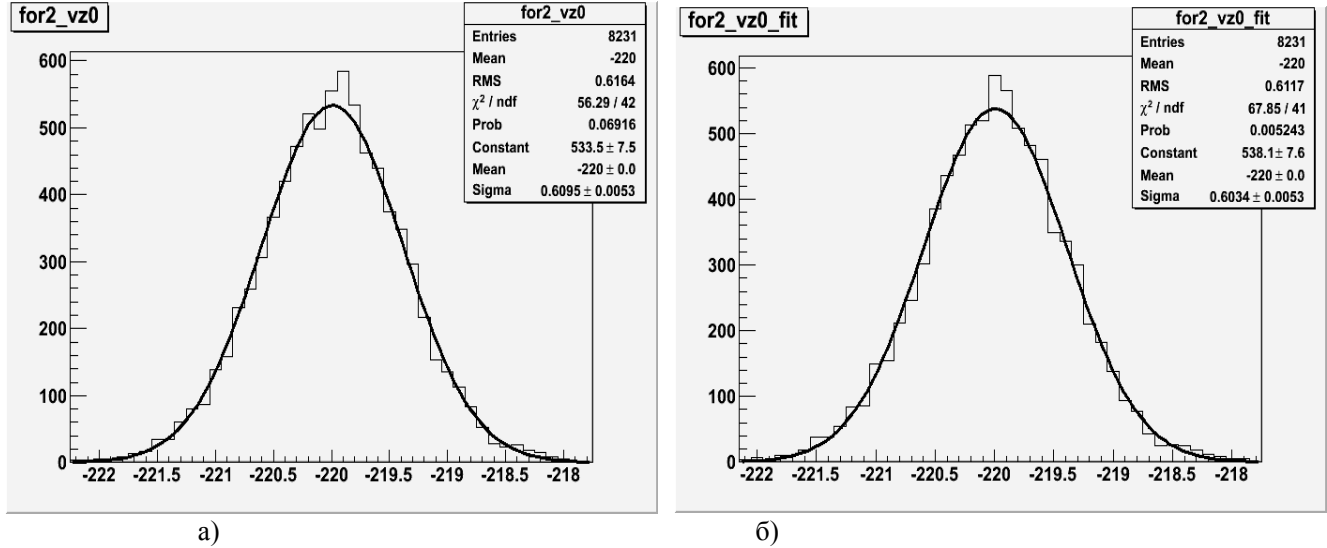


Рис. 7. Распределение событий по значениям z-координат первичных вершин, полученное методом наименьших квадратов (а) и после наложения связей на вершину (б).

Так как распределения событий по координатам первичной вершины являются распределениями Гаусса, то для распределений событий по x- и y-координатам первичных вершин приведем только их параметры (табл. 1):

Таблица 1.

	M	σ
x_0	0.001023 ± 0.000255	0.02296 ± 0.00019
x_0 (после фитирования)	0.0008831 ± 0.0002541	0.02286 ± 0.00019
y_0	-0.001135 ± 0.000200	0.01793 ± 0.00015
y_0 (после фитирования)	-0.0009054 ± 0.0001856	0.0167 ± 0.0001
z_0	-220 ± 0.0	0.6095 ± 0.0053
z_0 (после фитирования)	-220 ± 0.0	0.6034 ± 0.0053

Обеспечивается нахождение z-координаты первичной вершины с точностью порядка $\sigma_z = 0,6 \text{ см}$. Для x- и y-распределений соответственно $\sigma_x = 0,023 \text{ см}$, $\sigma_y = 0.017 \text{ см}$.

Распределения x- и y-координат ведут себя аналогично распределениям z-координат, поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением распределений событий по z-координате первичной вершины.

Видно, что оценка значений координат первичной вершины методом наименьших

квадратов является отличным приближением к значениям координат, полученным после наложения связей на первичную вершину. После наложения связей на вершину распределения координат сужаются незначительно. Однако, использование значений координат вершины, найденных методом наименьших квадратов в качестве первого приближения и поиск более точных значений координат вершины в процессе фитирования дает возможность улучшить точность значений координат при наложении связи на массу отдачи.

После наложения связи на массу отдачи распределение z-координат первичной вершины принимает вид, изображенный на рис. 8.

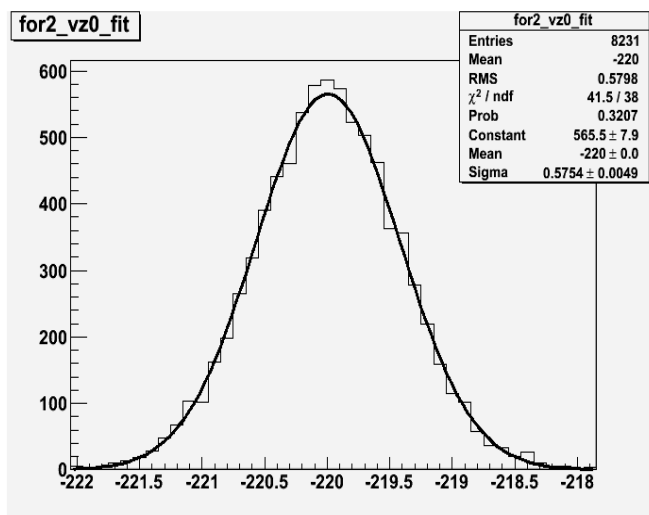


Рис. 8. Распределение событий по z-координате первичной вершины после наложения связей на вершину и массу отдачи.

Т. о., наложение связи на массу отдачи на 5-6% улучшает точность определения координат первичной вершины. Без уточнения координат вершины в процессе фитирования этот результат получить невозможно. Менее точное знание координат вершины приводит к уменьшению эффективности результата от наложения связи на массу отдачи. В случае наложения связей только на вершину поиск координат вершины в процессе фитирования не дает существенного улучшения точности определения координат вершины по сравнению с методом наименьших квадратов. В дальнейшем, если это специально не оговорено, все графики будут приводиться для случаев, когда координаты первичной вершины ищутся в процессе фитирования.

3.2. Результат наложения связей на первичную вершину и массу отдачи

На рис. 9 показано распределение инвариантной массы системы вторичных частиц для моделированных данных до и после наложения связей на вершину. При моделировании задано: импульс пионного пучка – 27 ГэВ, инвариантная масса системы вторичных частиц – 1 ГэВ. Распадается «резонанс» равномерно по фазовому объему.

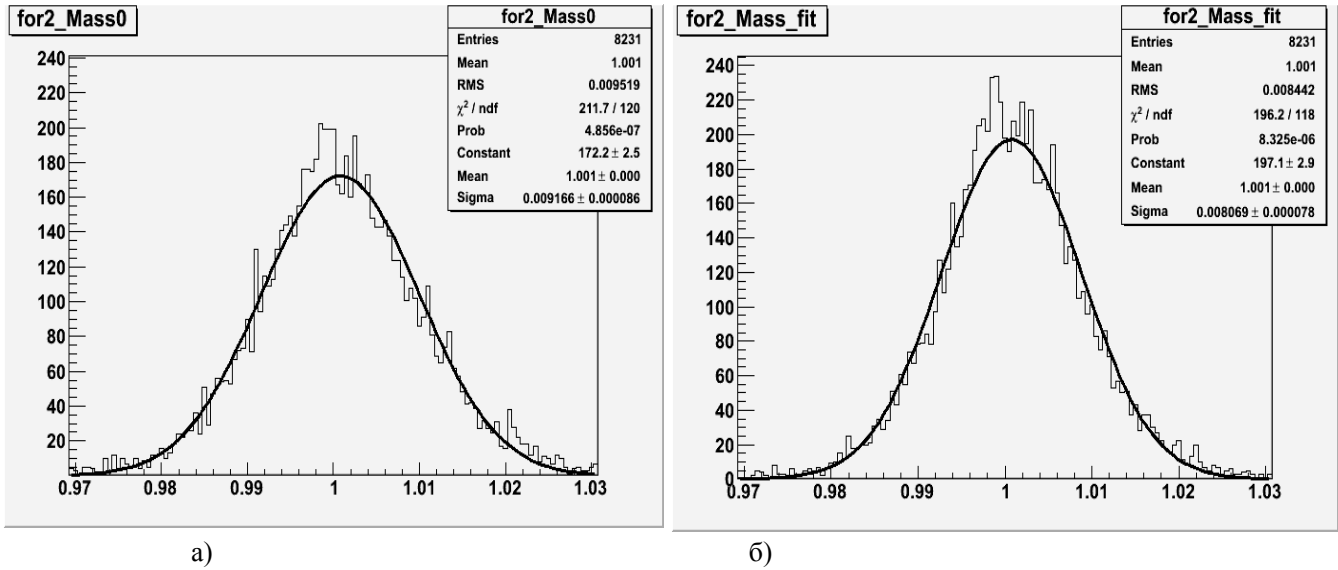


Рис. 9. Распределение событий по инвариантной массе системы вторичных частиц до (а) и после (б) наложения связей на вершину.

Видно, что распределение инвариантной массы системы вторичных частиц после наложения связей на вершину сужается примерно на 12%, что является существенным улучшением разрешения по инвариантной массе.

Пучковая частица взаимодействует с ядрами атомов мишени, в результате чего нуклон ядра (или ядро в целом в зависимости от переданного импульса) приобретает некоторый импульс отдачи. В эксперименте «ВЕС» отдача не измеряется, однако ее можно вычислить исходя из того, что энергия пучковой частицы + энергия нуклона, с которым она взаимодействует, согласно закону сохранения энергии должна быть равна сумме энергий вторичных частиц и энергии отдачи. Импульс пучковой частицы должен быть равен сумме импульсов вторичных частиц и импульса отдачи по закону сохранения импульса. Тогда, считая что энергия нуклона до столкновения с пучковой частицей равна массе протона, квадрат массы отдачи можно найти по формуле

$$m_{rec}^2 = E_{rec}^2 - p_{rec}^2 = \left(E_{beam} + m_p - \sum E_i \right)^2 - \left(p_{beam} - \sum \vec{p}_i \right)^2 .$$

Распределение событий по квадрату массы отдачи после наложения связей на вершину также сужается (рис. 10), причем почти на 20%. Как видно из графиков, пик распределения квадрата массы отдачи находится в районе массы протона (точнее квадрата массы протона: $0.938^2 \approx 0.88$). Это является подтверждением правильности идеи наложения связи на массу отдачи: так как изменение значений массы отдачи после наложения связей на вершину направлено в сторону истинных значений, то распределение по событиям истинных значений массы отдачи должно иметь вид узкого (по крайней мере более узкого чем до наложения связей на вершину) пика в районе массы протона. В случае, если масса отдачи в условиях эксперимента ВЕС действительно равна массе протона (нуклона), то наложение связи на массу отдачи должно еще значительно сузить распределения инвариантной массы системы вторичных частиц.

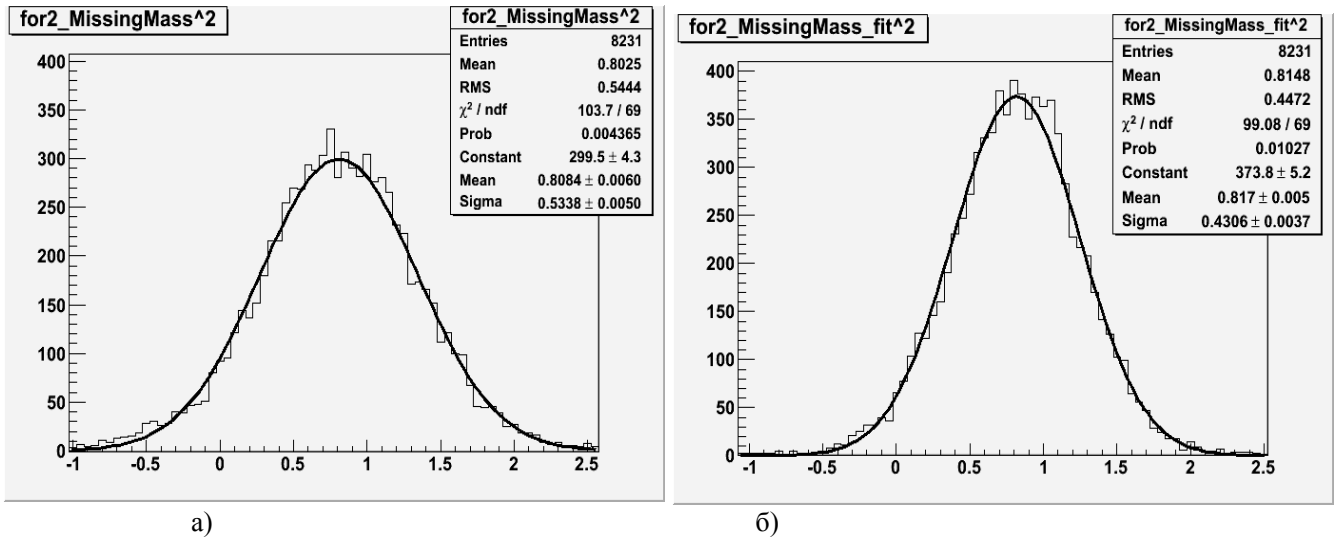


Рис. 10. Распределение квадрата массы отдачи до (а) и после (б) наложения связей на вершину.

Как обсуждалось ранее, для того чтобы задача была линейной мы пренебрегли в выражениях малостями второго порядка. Поэтому после наложения связей на массу отдачи распределение массы отдачи не превращается в δ -функцию, но тем не менее становится очень узким (рис.11).

Параметры распределений инвариантной массы системы вторичных частиц после наложения связи только на массу отдачи и после наложения связей на первичную вершину и массу отдачи одновременно представлено в табл. 2:

Таблица 2.

	M	σ
m_{inv} (после наложения связи на массу отдачи)	1.000 ± 0.0	0.007513 ± 0.000070
m_{inv} (после наложения связи на массу отдачи и вершину одновременно)	1.000 ± 0.0	0.007279 ± 0.000069

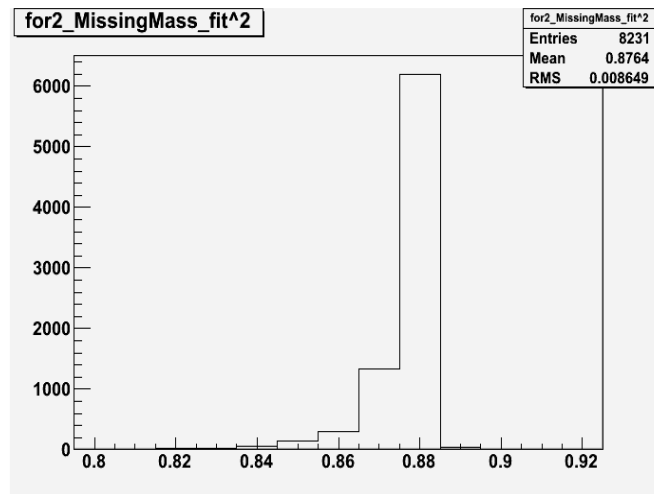


Рис. 11. Распределение событий по квадрату массы отдачи после наложения связи на массу отдачи.

Т. о., наложение связи на массу отдачи действительно дает положительный эффект, причем наложение связи только на массу отдачи дает больший эффект (улучшение разрешения по инвариантной массе на 18%), чем наложение только связей на вершину (улучшение распределения по инвариантной массе на 12%). Одновременное наложение обеих связей приводит к улучшению разрешения по инвариантной массе примерно на 20,5%

Нужно иметь ввиду, что если мы накладываем связь на массу отдачи, но не накладываем связь на вершину, то мы не можем найти поправки к координатам первичной вершины, так как они не входят в уравнение связи на массу отдачи.

В табл. 3 показано распределение событий по инвариантной массе системы вторичных частиц после наложения связи только на массу отдачи и после наложения связей на вершину и массу отдачи одновременно для случая, когда координаты первичной вершины находятся методом наименьших квадратов и далее не уточняются в процессе фитирования.

Таблица 3.

	M	σ
m_{inv} (после наложения связи на массу отдачи)	1.000 ± 0.0	0.007513 ± 0.000070
m_{inv} (после наложения связи на массу отдачи и вершину одновременно)	1.000 ± 0.0	0.007361 ± 0.000069

Как видно из таблицы, если мы принимаем найденные методом наименьших квадратов оценочные значения координат первичной вершины в качестве истинных значений координат вершины, то это слегка ухудшает распределение событий по инвариантной массе системы вторичных частиц (разрешение по инвариантной массе) по сравнению с методом поиска координат вершины в процессе фитирования. Нахождение более точных значений координат вершины в процессе фитирования положительно отражается на разрешении по инвариантной массе, однако эффект небольшой.

3.3. Влияние материала мишени (многократного рассеяния на мишени) на результаты.

В табл. 4, 5 представлены полученные после наложения связей на первичную вершину и массу отдачи параметры распределений событий по z-координатам первичной вершины при использовании в качестве материала мишени бериллия, алюминия и вольфрама без учета и с учетом многократного рассеяния на мишени. Энергия пучка 27 ГэВ, события двухтрековые.

Таблица 4.

После фитирования без учета многократного рассеяния	M	σ
z_0 (бериллий)	-220 ± 0.0	0.5752 ± 0.0049
z_0 (алюминий)	-220 ± 0.0	0.5668 ± 0.0048
z_0 (вольфрам)	-220 ± 0.0	0.5891 ± 0.0055

Таблица 5.

После фитирования с учетом многократного рассеяния	M	σ
z_0 (бериллий)	-220 ± 0.0	0.5751 ± 0.0049
z_0 (алюминий)	-220 ± 0.0	0.5667 ± 0.0048
z_0 (вольфрам)	-220 ± 0.0	0.5877 ± 0.0056

Соответствующие параметры распределений событий по инвариантной массе даны в табл. 6, 7.

Таблица 6.

После фитирования без учета многократного рассеяния	M	σ
m_{inv} (бериллий)	1.000 ± 0.0	0.00726 ± 0.00007
m_{inv} (алюминий)	1.000 ± 0.0	0.01169 ± 0.00012
m_{inv} (вольфрам)	1.000 ± 0.0	0.05667 ± 0.00062

Таблица 7.

После фитирования с учетом многократного рассеяния	M	σ
m_{inv} (бериллий)	1.000 ± 0.0	0.007279 ± 0.000069
m_{inv} (алюминий)	1.000 ± 0.0	0.01164 ± 0.00012
m_{inv} (вольфрам)	1.001 ± 0.001	0.05623 ± 0.00061

В табл. 8 даны параметры распределений этих же событий по инвариантной массе в зависимости от материала мишени до фитирования.

Таблица 8.

До фитирования	M	σ
m_{inv} (бериллий)	1.001 ± 0.000	0.009166 ± 0.000086
m_{inv} (алюминий)	1.001 ± 0.000	0.01293 ± 0.00014
m_{inv} (вольфрам)	1.001 ± 0.001	0.05753 ± 0.00064

Из представленных параметров распределений следует, что при энергиях частиц порядка 10 ГэВ многократное рассеяние на мишени начинает вносить значительный вклад в погрешность определения инвариантной массы уже при использовании алюминиевой мишени, а при использовании мишени из вольфрама вносит решающий вклад, но при этом практически не влияет на точность определения координат первичной вершины.

Так как зависимость многократного рассеяния от импульса частицы квадратичная, а от радиационной длины линейная, то, к примеру, для 10 ГэВ-ной частицы многократное рассеяние в мишени из вольфрама вносит такой же вклад в погрешность измерений как и для 1 ГэВ-ной частицы в мишени из бериллия (при одинаковых форме и размере мишеней). Поэтому при наличии событий с большим количеством треков, а также событий, в которых энергии частиц существенно отличаются, учет многократного рассеяния необходим. В событиях, в которых энергии частиц велики и существенно не отличаются, учет многократного рассеяния дает менее значительный эффект.

В табл. 9 представлены полученные после наложения связей только на первичную вершину параметры распределений событий по инвариантной массе системы вторичных частиц при использовании в качестве материала мишени вольфрама без учета и с учетом многократного рассеяния на мишени.

Таблица 9.

Вольфрам	M	σ
m_{inv} (до фитирования)	1.001 ± 0.001	0.05751 ± 0.00064
m_{inv} (после наложения связей на вершину без учета многократного рассеяния)	1.000 ± 0.000	0.05712 ± 0.00065
m_{inv} (после наложения связей на вершину с учетом многократного рассеяния)	1.001 ± 0.001	0.05654 ± 0.00062

Как видно из таблицы, в случае наложения связей только на первичную вершину учет многократного рассеяния дает более значительный эффект: улучшение разрешения по инвариантной массе без учета многократного рассеяния на мишени порядка 0,7%, с учетом многократного рассеяния – 1,7%. Аналогично обстоит дело и в случае наложения связи только на массу отдачи (табл. 10) – примерно 0,8% и 1,3 % соответственно. Т. о., при наличии малого числа связей (малого количества уравнений связей) учет многократного рассеяния необходим (см. раздел 3.4.).

Таблица 10.

Вольфрам	M	σ
m_{inv} (до фитирования)	1.001 ± 0.001	0.05753 ± 0.00064
m_{inv} (после наложения связи на массу отдачи без учета многократного рассеяния)	1.000 ± 0.000	0.05708 ± 0.00063
m_{inv} (после наложения связи на массу отдачи с учетом многократного рассеяния)	1.000 ± 0.000	0.05677 ± 0.00063

Заметим, что с ростом многократного рассеяния на мишени эффективность связи на массу отдачи уменьшается быстрее, чем эффективность связей на вершину. Поправки на многократное рассеяние больше отражаются на эффективности связей на вершину, чем на массу отдачи.

При использовании мишени из плотного материала точность измерений падает, учет многократного рассеяния на мишени способен только до некоторой степени уменьшить падение точности измерений.

3.4. Зависимость результата о количества наложенных связей

Заметим, что наложение каждой дополнительной связи дает все меньший эффект. Как показано выше, при наложении связи только на первичную вершину сужение распределения событий по инвариантной массе составляет 12%, при наложении связи только на массу отдачи – 18%, а при наложении обеих связей одновременно – всего 20,5%.

Это можно понять следующим образом. Налагая связи на первичную вершину, мы тем самым вносим априорную информацию и за счет этого уточняем параметры события, в том числе и массу отдачи (см. рис. 10). Т. е., налагая связи на первичную вершину, мы в том числе вносим информацию, уточняющую значение массы отдачи. Поэтому внесение дополнительно априорной информации за счет наложения связи на массу отдачи не дает столь значительного эффекта – часть этой информации уже внесена при наложении связей на вершину.

В двухтрековых событиях при наложении связей на вершину мы имеем шесть связей (пучковый трек включается на равных с треками вторичных частиц) – по две связи на трек. Получим результат, наложив сперва только две, потом четыре, а потом и все шесть связей. Мы увидим как по мере роста числа связей сужается распределение событий по инвариантной массе системы вторичных частиц (табл. 11), но каждая следующая связь дает все меньший эффект, так как информация, содержащаяся в каждой связи пересекается с информацией содержащейся в другой связи.

Таблица 11.

	M	σ
m_{inv} (2 связи)	1.001 ± 0.000	0.008604 ± 0.000082
m_{inv} (4 связи)	1.001 ± 0.000	0.008102 ± 0.000079
m_{inv} (6 связей)	1.001 ± 0.000	0.008101 ± 0.000079

3.5. Исследование работы алгоритма на данных 36-го сеанса эксперимента «ВЕС».

На рис. 12 дано распределение двух- и трехтрековых событий по поправкам к инвариантной массе системы вторичных частиц, полученных после наложения связей на первичную вершину, для данных 36-го сеанса эксперимента «ВЕС». Видно, что поправки к экспериментально полученным значениям инвариантной массы порядка 10 МэВ, что согласуется с результатами, полученными на моделированных данных.

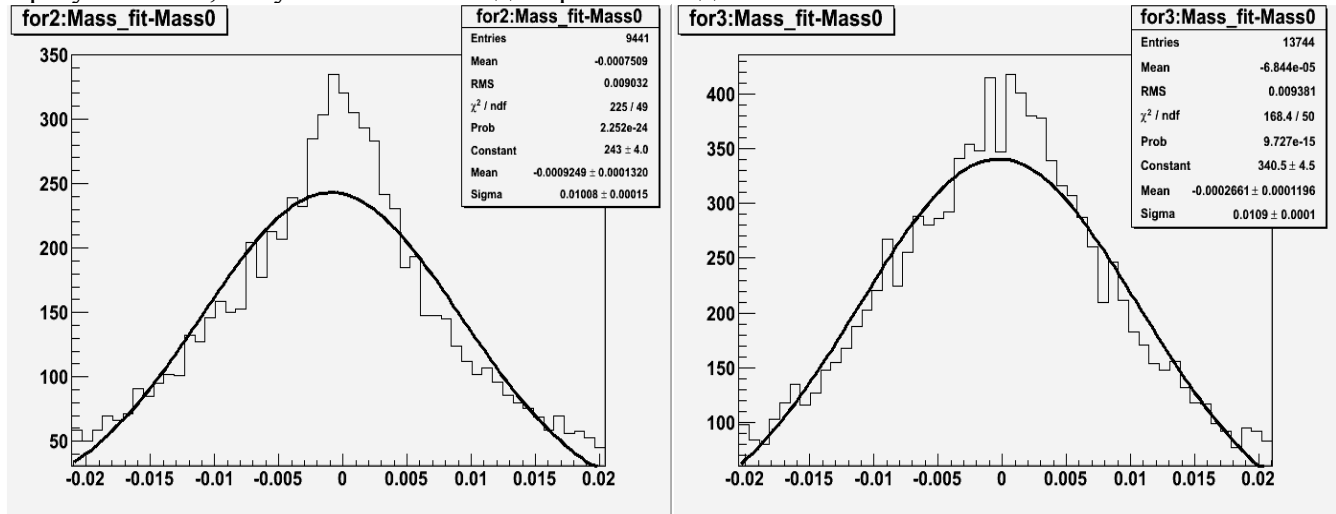


Рис. 12. Распределение двух- (а) и трехтрековых (б) событий 36-го сеанса эксперимента «ВЕС» по поправкам к инвариантной массе системы вторичных частиц, полученным после наложения связей на первичную вершину.

Распределение событий по поправкам к z-координатам событий 36-го сеанса имеет $\sigma = 0.6$ см. Это также согласуется с результатами, полученными на моделированных данных.

3.6. Эффективность алгоритма поиска вторичных вершин на моделированных данных

На рис. 13 изображен результат работы алгоритма поиска вторичных вершин на моделированных данных. Распадается «резонанс» массой в 1 ГэВ в πK^0 . Далее K^0 распадается на положительный и отрицательный пи-мезон. Ищутся вторичные вершины, возникшие в результате распада К-мезона. Импульс пучка – 27 ГэВ.

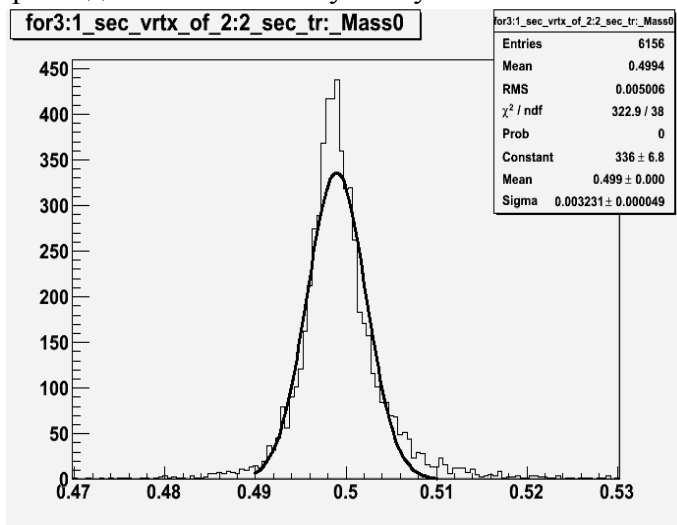


Рис. 13. Распределение моделированных событий, содержащих вторичную вершину распада К-мезона, по инвариантной массе системы частиц вторичной вершины, полученное с помощью алгоритма поиска вторичных вершин.

Из 100000 моделированных трехтрековых событий в ~ 8000 не было зарегистрировано ни одного трека, в ~ 58000 событий был зарегистрирован только один трек, в ~ 12000 событий были зарегистрированы два трека, и только в ~ 22000 были зарегистрированы все три трека. Из ~ 22000 трехтрековых событий с помощью алгоритма поиска вторичных вершин были найдены вторичные вершины в ~ 6000 событиях, т. е. порядка 27%.

Даже если в каждом трехтрековом событии имеется вторичная вершина, алгоритм поиска вторичных вершин может дать неверный результат, выбрав в качестве двух пи-мезонов вторичной вершины один пи-мезон, действительно образовавшийся в результате распада вторичного K^0 , а другой – образовавшийся в результате распада «резонанса» (см. рис. 14). Это приводит к тому, что в распределении событий по инвариантной массе системы частиц вторичной вершины будет наблюдаться фон.

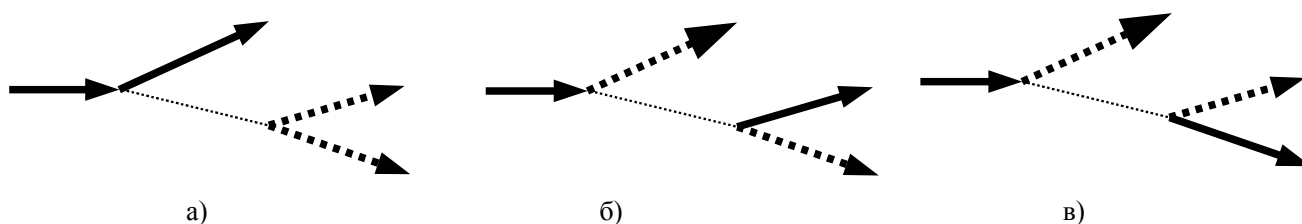


Рис. 14. Истинная (а) и ложные (б, в) гипотезы для трехтрекового события, содержащего вторичную вершину (сплошная линия со стрелкой – трек принадлежит к первичной вершине, пунктирная – ко вторичной).

Для того, чтобы оценить форму фона, нужно построить распределение событий по инвариантной массе системы частиц вторичных вершин для всех гипотез, изображенных на рис. 14. Тогда в 1/3 случаев обе частицы окажутся пи-мезонами, образовавшимися в результате распада K^0 и инвариантная масса их системы будет равна массе К-мезона, в 2/3 случаев полученная инвариантная масса системы частиц будет давать вклад в фон. Распределение моделированных трехтрековых событий с вторичными вершинами по построенной таким образом инвариантной массе показано на рис. 15.

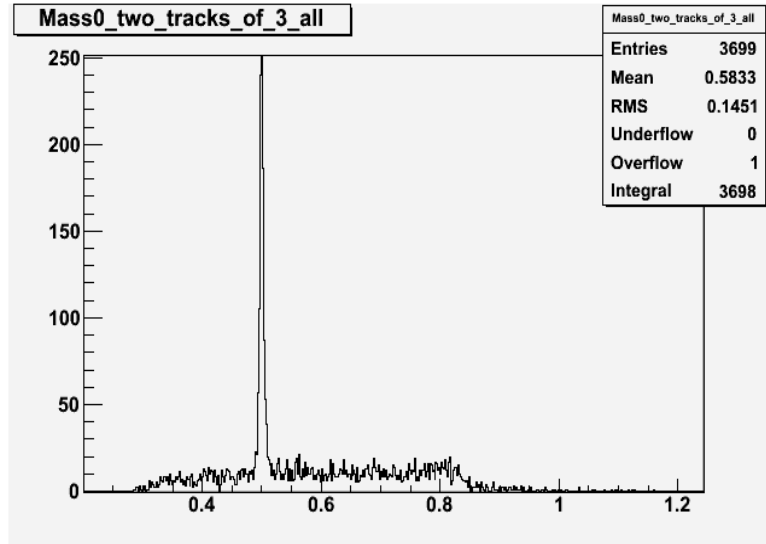


Рис. 15. Распределение моделированных трехтрековых событий с вторичными вершинами по инвариантной массе системы двух произвольно выбранных частиц.

Как мы видим, фон распределен довольно равномерно в интервале $(2m_\pi, 0.85 GeV)$ и составляет примерно 2/3 от общего количества событий.

В событиях, полученных с помощью алгоритма поиска вторичных вершин, доля фона мала – не более 0,5-1% от общего количества событий (рис. 16). Сама форма фона резко отличается от фона изображенного на рис. 15. Это говорит о том что ложные гипотезы надежно отличаются от истинных. Судя по форме фона, основной вклад в него вносят события, которые были правильно распознаны, но из-за ошибок измерений инвариантная масса системы частиц вторичной вершины оказалась далеко отстоящей от массы К-мезона.

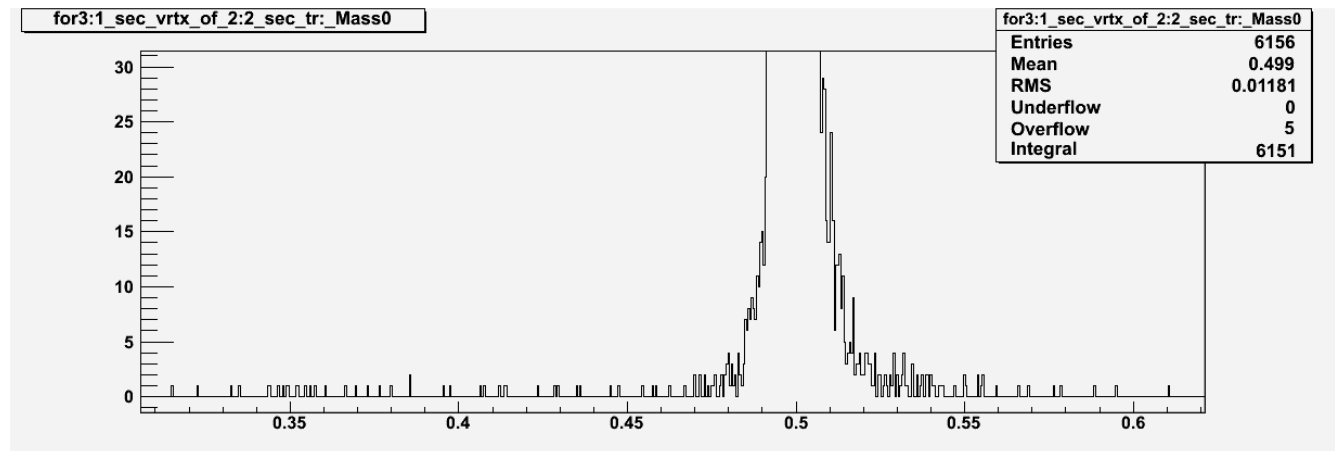


Рис. 16. Фон в распределении моделированных трехтрековых событий с вторичной вершиной по инвариантной массе системы частиц вторичной вершины.

В связи с особенностями установки «ВЕС» события с вторичными вершинами, имеющими координаты $z_{sec} > -170$, практически не регистрируются. Поэтому целесообразно наложить соответствующее обрезание. Также для того чтобы предотвратить «протечку» трехтрековых событий, не содержащих вторичных вершин, нужно наложить обрезание $z_{sec} > -210$. После наложения перечисленных обрезаний, распределение событий, изображенное на рис. 16, примет следующий вид (рис. 17):

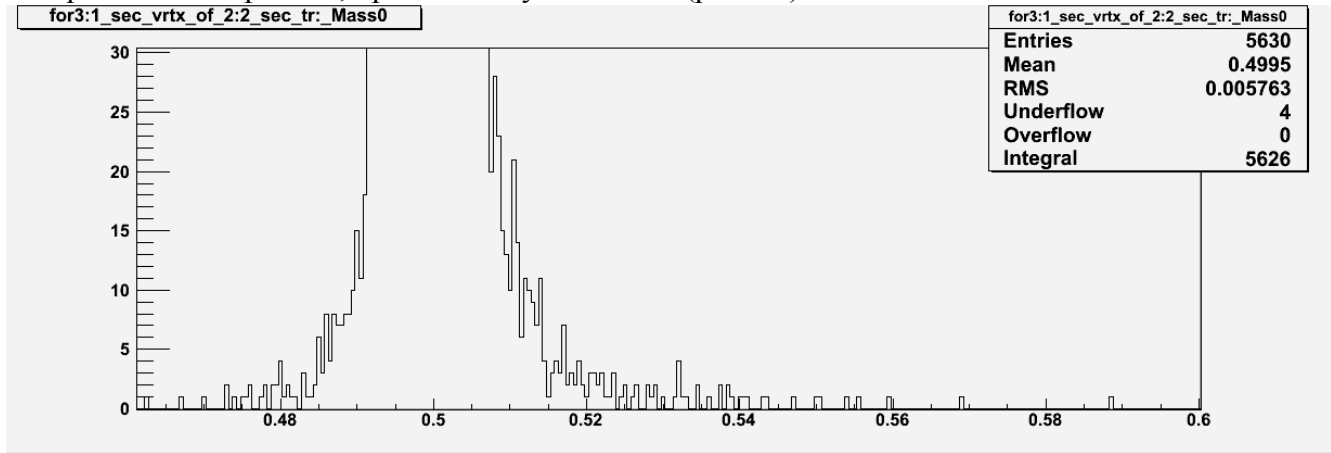


Рис. 17. Фон в распределении моделированных трехтрековых событий с вторичной вершиной по инвариантной массе системы частиц вторичной вершины после наложения обрезаний $z_{sec} > -210$, $z_{sec} < -170$.

Т. о., после наложения обрезаний остались практически только правильно распознанные события, а разброс значений обусловлен точностью измерений параметров треков. Заметим, что наложение обрезаний уменьшает количество верно идентифицированных событий с вторичными вершинами всего на 8,5%, с другой стороны, как будет показано в разделе 3.7, наложение именно этих обрезаний позволяет резко уменьшить фон при поиске вторичных вершин в экспериментальных данных.

Влияние многократного рассеяния на мишени на ширину пика вторичного К-мезона отсутствует, так как вторичный К-мезон распадается в основном за пределами мишени. Доля правильно идентифицированных событий с вторичными вершинами (~30%) также практически не зависит от многократного рассеяния частиц на первичной мишени даже при использовании в процессе моделирования вольфрамовой мишени. Это связано с малым размером мишени.

3.7. Поиск распадов вторичных К-мезонов в данных 36-го сеанса эксперимента ВЕС

На рис. 18 приведено распределение событий со вторичными вершинами по инвариантной массе системы частиц вторичной вершины, полученное из данных 36-го сеанса эксперимента ВЕС после наложения обрезания по первичной вершине (полагается, что координаты первичной вершины лежат в интервале $[-210, -230]$ см), для трех- и четырехтрековых событий.

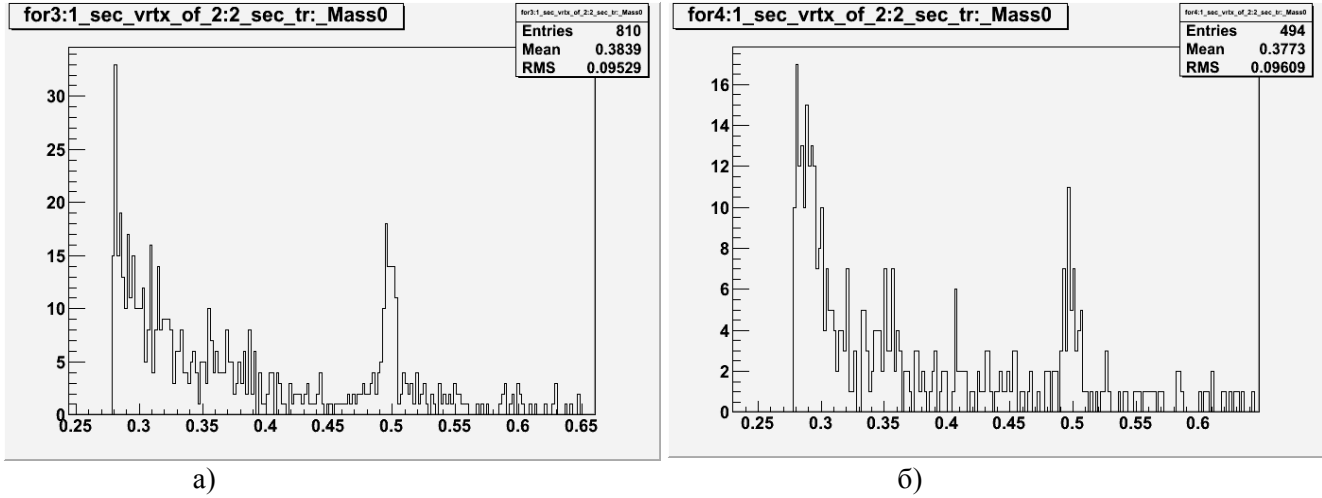


Рис. 18. Распределение трех- (а) и четырехтрековых (б) событий со вторичными вершинами по инвариантной массе системы частиц вторичной вершины.

На гистограммах виден вторичный К-мезон (пик в районе 0.5 ГэВ). Ширина пика определяется разрешением установки ВЕС ($\sigma \approx 0.007$).

Однако, вершины, определяемые алгоритмом как вторичные, могут возникать не только в результате распада вторичного К-мезона, но и в результате конверсии гамма-квантов в электрон-позитронные пары. На рис. 19 представлено распределение событий по инвариантной массе системы частиц для вторичной вершины в случае, когда предполагается, что вторичные частицы являются электронами. Обрезание сделано только по первичной вершине.

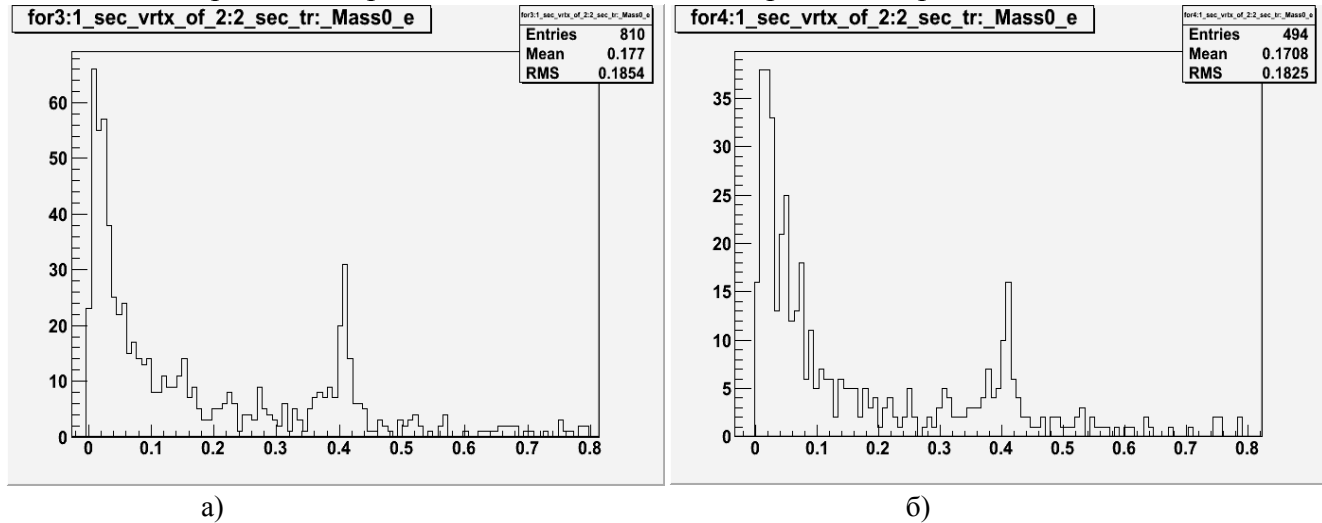


Рис. 19. Распределение трех- (а) и четырехтрековых (б) событий с вторичными вершинами по инвариантной массе системы частиц вторичной вершины в случае, когда предполагается, что вторичные частицы являются электронами.

Действительно, пик в районе малых значений инвариантной массы соответствует электронам/позитронам, его ширина определяется разрешением установки. После обрезания по этому пику ($M_e > 0.1$) распределения инвариантной массы принимают следующий вид (рис. 20):

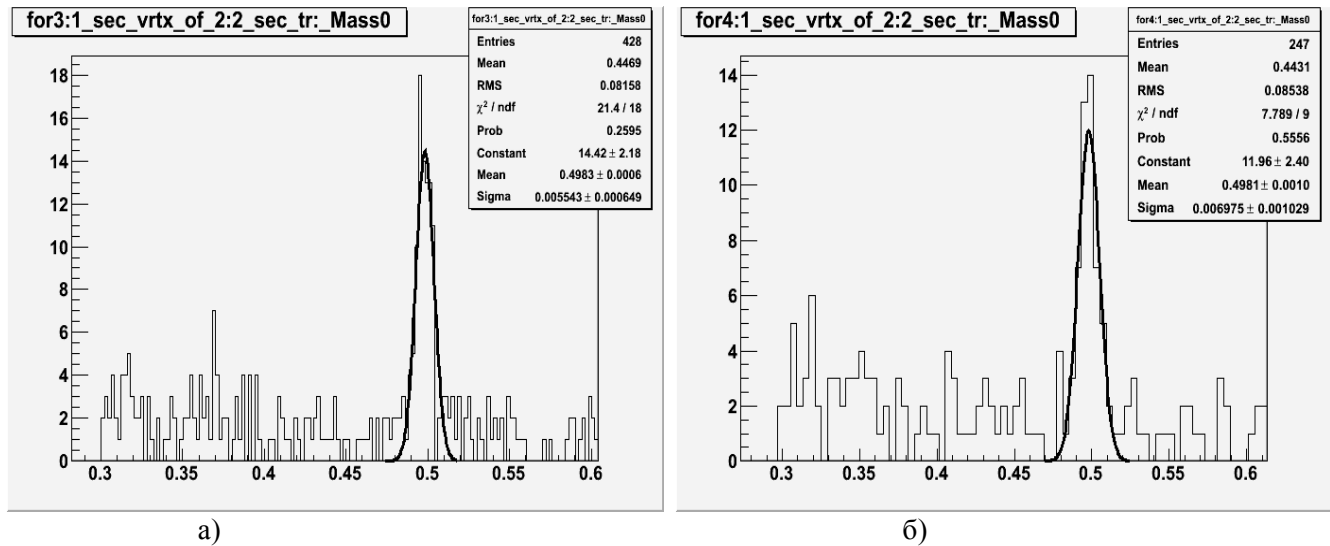


Рис. 20. Распределение трех- (а) и четырехтрековых (б) событий с вторичными вершинами по инвариантной массе системы частиц вторичной вершины после обрезания по первичной вершине и электрон-позитронным парам.

В событиях, которые определены как не содержащие вторичные вершины, имеется некоторая доля событий, на самом деле содержащих вторичные вершины, а в событиях, которые определены как содержащие вторичные вершины, имеется некоторая доля событий, на самом деле не содержащих вторичные вершины.

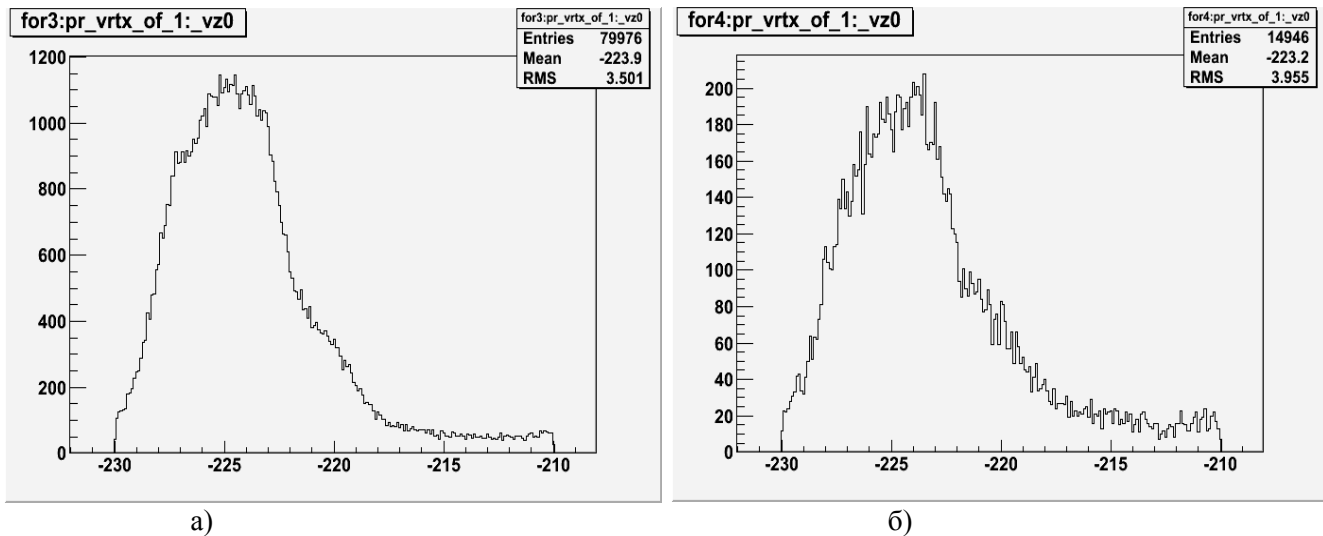


Рис. 21. Распределение трех- (а) и четырехтрековых (б) событий, не содержащих вторичные вершины, по z-координате первичной вершины после обрезания по вершине и массе электрона.

3.

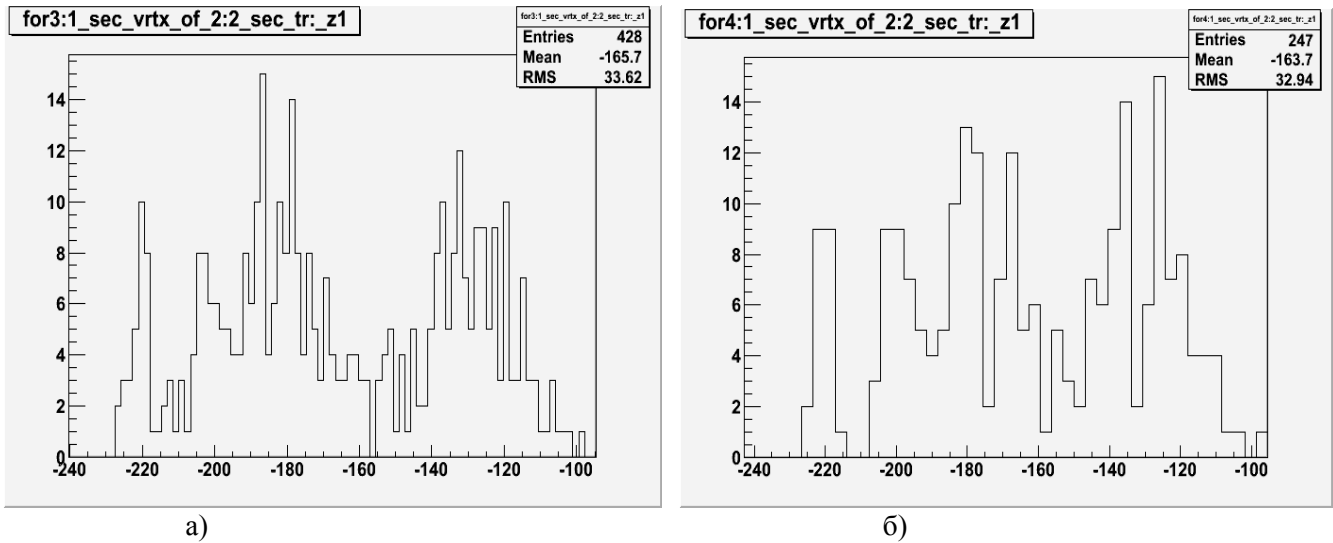


Рис. 22. Распределение трех- (а) и четырехтрековых (б) событий с вторичными вершинами по z-координате вторичной вершины после обрезания по первичной вершине и массе электрона.

Если найденная вторичная вершина на самом деле относится к случаю, изображенному на рис. 6, то в распределении событий с вторичными вершинами по z-координате вторичной вершины должны быть события, распределенные как показано на рис. 21. С другой стороны, распределение событий с вторичными вершинами по z-координате вторичной вершины имеет вид, изображенный на рис. 22. Это же распределение, но после обрезания по массе К-мезона (остаются только события с вторичными вершинами, в которых инвариантная масса системы частиц вторичной вершины лежит в интервале $[0.47, 0.53]$ ГэВ), принимает вид, изображенный на рис. 23.

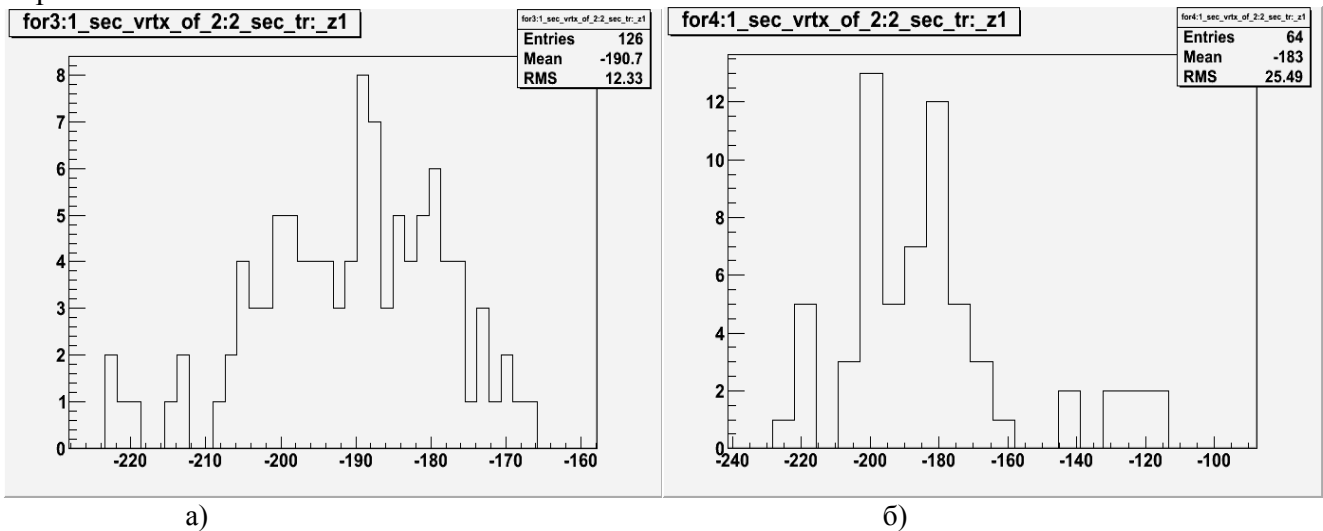
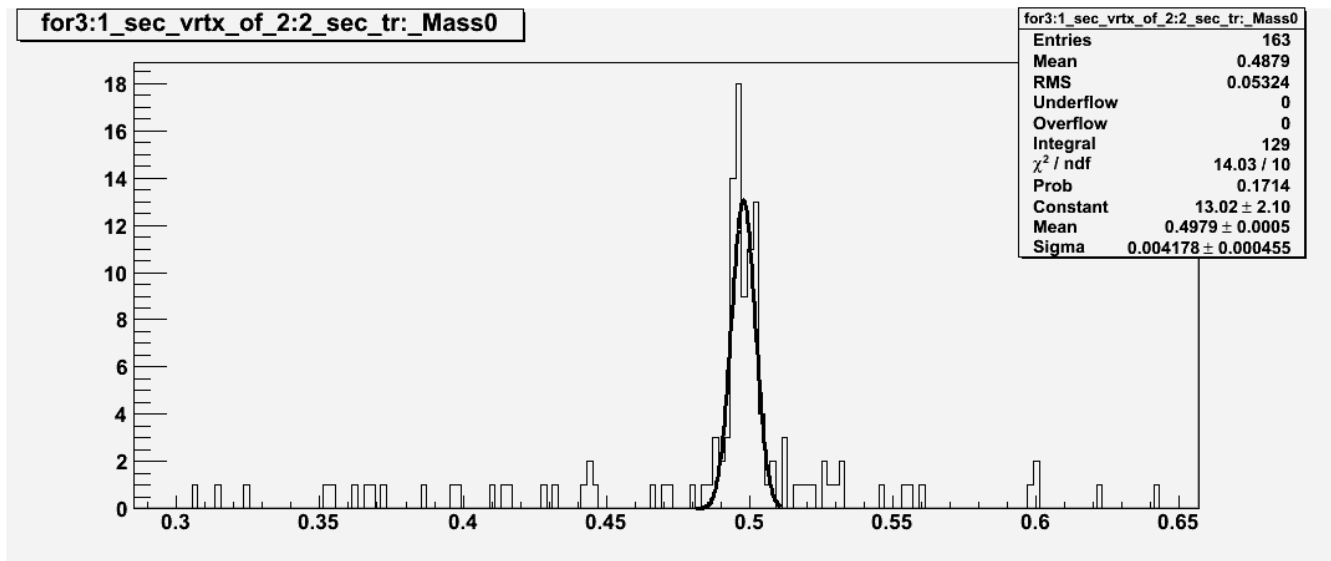


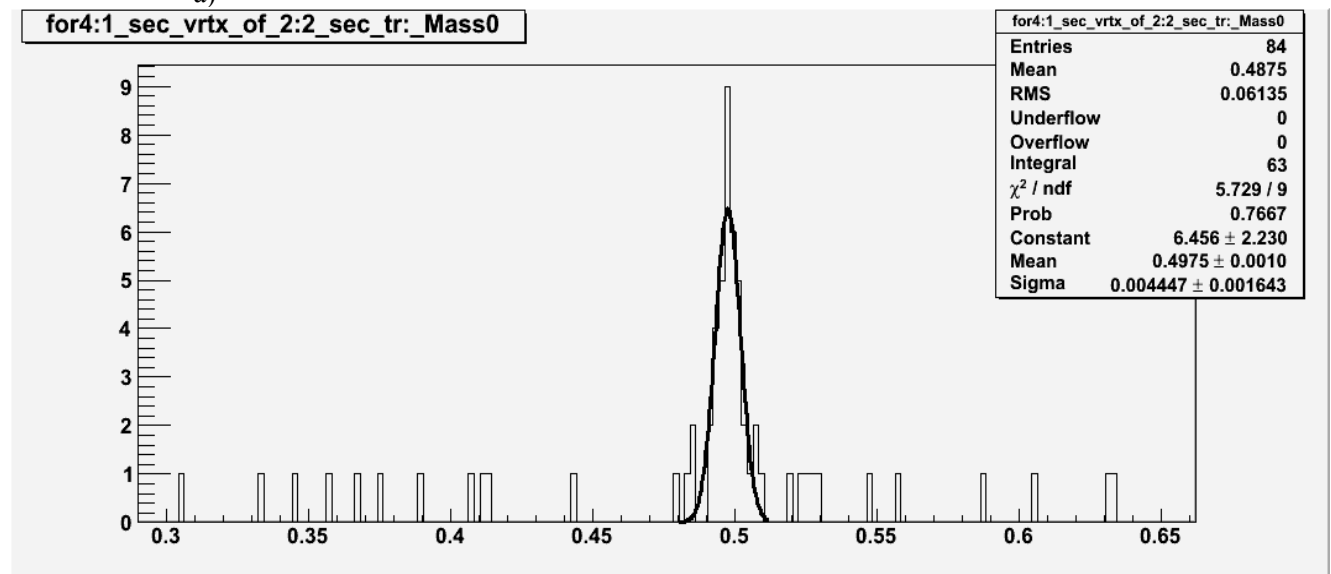
Рис. 23. Распределение трех- (а) и четырехтрековых (б) событий с вторичными вершинами по z-координате вторичной вершины после обрезания по первичной вершине, массе электрона и массе К-мезона.

Как видно из представленных распределений, из событий, которые были определены как содержащие вторичные вершины, реально вторичные вершины, возникшие в результате распада вторичных К-мезонов, содержат только события, в которых z-координата вторичной вершины находится в интервале $[-210, -170]$ см. В то же время основная часть событий, определенных как

события, содержащие вторичные вершины, но на самом деле не являющихся таковыми, имеют значение координаты вторичной вершины $z > -170$ либо $z < -210$. Следовательно, можно наложить обрезание по z-координате вторичной вершины. Результат показан на рис. 24.



a)



б)

Рис. 24. Распределение трех- (а) и четырехтрековых (б) событий с вторичными вершинами по инвариантной массе системы частиц вторичной вершины после обрезания по z-координате первичной вершины, массе электрона и z-координате вторичной вершины.

Действительно, обрезание по вторичной вершине дает значительный эффект – фон резко уменьшился. Величина обрезания $z < -210$ определяется точностью нахождения z-координаты вершин. Величина $z > -170$ означает, что при большом удалении вторичных вершин от мишени установка ВЕС не в состоянии их зарегистрировать. При $z = -170$ стоит наклонная камера, предназначенная для разрешения неоднозначностей при связывании x- и y-проекции треков. При реконструкции треков требуется хотя бы один хит в этой камере. Поэтому реальное положение вторичной вершины не может иметь $z > -170$. То что мы имеем некоторую долю событий с $z > -170$ связано с тем, что если треки почти параллельны, то точность

восстановления z-координаты плохая – порядка размеров головной части трековой системы установки ВЕС.

Образовавшиеся в результате конверсии гамма-квантов электрон-позитронные пары имеют очень малые углы разлета, поэтому трековой системой воспринимаются как одна частица. Только после попадания в поле магнита они разделяются. В связи с этим для них в большинстве случаев справедливо $z > -170$. Поэтому резкое уменьшение фона после обрезания по z-координате вторичной вершины говорит о том, что фон в основном возникает за счет электрон-позитронных пар. Составляющая фона, обусловленная неверной классификацией события, мала.

Кроме перечисленных обрезаний используется также условие, что если две частицы принадлежат вторичной вершине, возникшей в результате распада вторичного нейтрального K-мезона, то знаки зарядов этих частиц должны быть противоположными. Это позволяет уменьшить фон на 20%.

Количество событий, найденных как события с вторичными вершинами, при наложении обрезания только на z-координату первичной вершины, равно 810 трехтрековых событий и 494 для четырехтрековых. После обрезания по z-координате первичной вершины и конверсии фотонов, имеем соответственно 428 и 247 событий. После обрезания по массе электрона, z-координате первичной и вторичной вершины – 163 и 84 события. Причем количество найденных вторичных K-мезонов после наложения обрезаний примерно 80 для трехтрековых событий с вторичной вершиной и примерно 40 для четырехтрековых. Наложение обрезаний по вторичной вершине ведет к потере не более 10-15% событий с вторичными K-мезонами, но уменьшает фон примерно в три раза. Количество трехтрековых событий, в которых искались вторичные вершины, равно 80440, четырехтрековых – 14972. Т. о., доля событий, не содержащих вторичные вершины, но определенных как содержащие их, от общего числа событий, не содержащих вторичные вершины, для трехтрековых событий в зависимости от наложенных обрезаний 0.001-0.004, для четырехтрековых событий – 0.003-0.010. С учетом того, что как правило инвариантная масса неправильно идентифицированных событий с вторичными вершинами не совпадает с массой K-мезона, то реально в массовом пике K-мезона имеется не более 5-10% примеси таких событий (так как в интервале массы частиц вторичной вершины для трехтрековых событий 0.3-0.55 ГэВ имеется 43 «неправильных» событий и они распределены практически равномерно по интервалу, а пик K-мезона занимает интервал примерно 0.485-0.51, количество «неправильных» событий в этом пике порядка 5).

К сожалению, на экспериментальных данных невозможно установить долю событий содержащих вторичные вершины от распавшихся K-мезонов, но которые были идентифицированы как не содержащие вторичных вершин. Малая статистика 36 сеанса эксперимента ВЕС также не позволила представить гистограммы с большим разрешением и с обрезанием по импульсу пучка (импульс пучка должен быть 27 ГэВ).

Ввиду малой статистики мы не искали $\Lambda^0 \rightarrow p \pi^-$ — третий основной канал вторичных вершин (после K^0 и конверсии гамма-квантов в электрон-позитронные пары).

4. Заключение.

Разработаны алгоритмы поиска первичной вершины с учетом многократного рассеяния на мишени, наложения связей на первичную вершину и массу отдачи, а также алгоритм поиска вторичных вершин. Исследована работоспособность алгоритмов на моделированных данных и на данных 36-го сеанса эксперимента «ВЕС».

Автор выражает признательность Ю. А. Хохлову, А. М. Зайцеву и А. Ивашину за плодотворные обсуждения и ценные рекомендации.

5. Литература

1. А.А. Киряков, В.Н. Рядовилов, В.В. Змушко, “Фильтрация данных с микроstriпового вершинного детектора при поиске распадов очарованных мезонов в эксперименте СВД-2” (препринт ИФВЭ), Протвино, ИФВЭ, 2005
2. Д. Худсон, “Статистика для физиков. Лекции по теории вероятностей и элементарной статистике”(перевод с английского), М., “Мир”, 1970
3. PDG, “Review of particle physics”, 2004
4. А.А. Крянев, Г.В. Лукин, ”Математические методы обработки неопределенных данных”, М. “Физматлит”, 2003
5. Л.Д. Кудрявцев, “Курс математического анализа”, Т. 2
6. Дж. Х. Уилкинсон, “Алгебраическая проблема собственных значений” (перевод с англ. В.В. Воеводина и В.Н. Фадеевой), М., “Наука”, 1970
7. Е. Бюклинг, К. Каянти, “Кинематика элементарных частиц”(перевод с английского под ред. Г.И. Копылова), М., “Мир”, 1975