

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
– ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ НИЦ “КУРЧАТОВСКИЙ  
ИНСТИТУТ”

На правах рукописи

Жохов Роман Николаевич

**Фазовые переходы под влиянием внешних условий в  
низкоразмерных моделях теории поля**

Специальность 01.04.02 —  
«теоретическая физика»

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Протвино — 2015

**Работа выполнена** в отделе теоретической физики Государственного научного центра Российской Федерации – Института физики высоких энергий НИЦ «Курчатовский институт».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
главный научный сотрудник отдела  
теоретической физики ФГБУ ГНЦ ИФВЭ  
НИЦ «Курчатовский институт»  
Клименко Константин Григорьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры высшей математики  
факультета информатики МГУПИ  
П.А. Эминов  
  
доктор физико-математических наук,  
заместитель директора Лаборатории  
теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова  
А.Б. Арбузов

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт  
ядерной физики имени Д.В. Скобельцына  
Московского государственного университета  
имени М.В. Ломоносова

Защита состоится " \_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2016 г. в \_\_\_ ч. \_\_\_ мин. на заседании диссертационного совета Д 201.004.01 при ФГБУ ГНЦ ИФВЭ НИЦ «Курчатовский институт» по адресу: 142281, Московская область, г. Протвино, площадь Науки, дом 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте  
[http://www.ihep.su/files/Zhohov\\_thesis.pdf](http://www.ihep.su/files/Zhohov_thesis.pdf)  
ФГБУ ГНЦ ИФВЭ НИЦ «Курчатовский институт».

Автореферат разослан " \_\_\_ " \_\_\_\_\_ 2015 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 201.004.01

Ю.Г. Рябов

## Актуальность темы исследований

В современной физике и, в частности, в физике элементарных частиц симметрии имеют огромное значение. Важна не только симметрия модели, а также возможные ее нарушения. Существует идея о так называемом спонтанном нарушении симметрии, когда модель является симметричной, а ее вакуумное состояние нарушает симметрию. Идея о спонтанном нарушении симметрии лежит в основе стандартной модели и, в частности, механизма Хиггса, посредством которого частицы приобретают массы. Однако, имеется другой способ нарушения симметрии, динамический, при котором симметрия нарушается динамическим образом. Примерами моделей с динамическим нарушением симметрии являются модели Намбу–Йона-Лазинио и Гросса-Неве.

В 1961 году Намбу и Йона-Лазинио предложили модель для объяснения того, почему нуклоны имеют такую большую массу. В то время еще не было идеи о кварках и квантовой хромодинамики, нуклоны были элементарными частицами, составляющими материю. Тем не менее, были указания на существование частично сохраняющегося аксиального тока и приближенной киральной симметрии. Так как приближенная киральная симметрия предполагает почти безмассовые фермионы, их идея состояла в том, что массовая щель в спектре нуклона генерируется посредством динамического нарушения киральной симметрии. Была использована аналогия с появлением щели в модели Бардина–Купера–Шиффера, которая описывает сверхпроводимость. В модели Намбу–Йона-Лазинио взаимодействие нуклонов, которое обеспечивает нарушение симметрии и генерацию массы, моделируется контактным четырехфермионным взаимодействием. После появления квантовой хромодинамики и выяснения, что адроны состоят из кварков, модель Намбу–Йона-Лазинио была переписана через кварковые поля. Сейчас модель Намбу–Йона-Лазинио используется как низкоэнергетическая эффективная модель взаимодействия кварков. Модель Намбу–Йона-Лазинио является четырехмерной моделью и является перенормируемой, но может быть использована как эффективная теория, справедливая до некоторого масштаба энергии.

В 1974 году Д. Гросс и А. Неве рассмотрели похожую модель с четырехфермионным взаимодействием в пространстве-времени с меньшим количеством измерений. Низкоразмерная модель Гросса-Неве является перенормируемой и обладает некоторыми общими основными свойствами с квантовой хромодина-

микой, в то же время, эта модель имеет более простую структуру и поддается аналитическому исследованию и, таким образом, она является хорошей лабораторией для изучения систем с сильным взаимодействием. В ней намного проще исследовать качественно такие реальные физические явления, как динамическое нарушение симметрий, цветовая сверхпроводимость, а также моделировать фазовую диаграмму реальной квантовой хромодинамики.

В диссертации исследуется  $(2+1)$ -мерная модифицированная модель Гросса-Неве при различных внешних условиях.

Важной причиной для изучения  $(2+1)$ -мерных моделей квантовой теории поля является то, что есть много систем конденсированного состояния вещества, которые, во-первых, имеют (квази)планарную структуру, то есть являются (квази)двумерными, во-вторых, спектр их возмущений описывается релятивистским уравнением Дирака, а не уравнением Шредингера, как в нерелятивистской квантовой механике. Среди таких систем высокотемпературные купраты ( $\text{high-}T_c \text{ cuprate}$ ), "железные сверхпроводники", графен (слой углеродных атомов толщиной в один атом) и так далее. Многие свойства таких систем конденсированного состояния вещества могут быть объяснены в рамках различных  $(2+1)$ -мерных квантовых теорий поля, включая модели типа Гросса-Неве. Графену, как первому квазипланарному объекту, полученному экспериментально, в последнее время было посвящено множество работ.

### **Практическая значимость работы**

Исследуемые модели и полученные результаты могут использоваться для качественного анализа сверхпроводящей фазы в квазипланарных системах конденсированного состояния вещества. Кроме того, полученные результаты могут использоваться при исследовании влияния магнитных полей на фазовые переходы в квазипланарных системах. Была исследована модель с одним компактифицированным измерением, которая может использоваться для качественного анализа фазовых переходов в углеродных нанотрубках (слой графена, свернутый в трубку). Численные оценки показывают, что рассмотренные фазовые переходы могут наблюдаться в реальных системах конденсированного состояния вещества при лабораторных значениях внешнего магнитного поля.

## Основная характеристика работы

Диссертационная работа посвящена изучению фазовой структуры четырехфермионных моделей типа Гросса-Неве и влияние на них внешних условий. Проводится изучение нарушения симметрий в рамках непертурбативного подхода  $\frac{1}{N}$ -разложения.

Исследуются фазовые переходы в  $(2+1)$ -мерной модифицированной модели Гросса-Неве (модели Ходоса), которая описывает борьбу между двумя явлениями: нарушением киральной симметрии (образование экзитонных пар) и сверхпроводимостью (образование куперовских пар). Очевидно, что такая модель может использоваться для качественного анализа сверхпроводящей фазы в квазипланарных системах конденсированного состояния вещества. Наша модель является прямым обобщением известной  $(1+1)$ -мерной модели Ходоса, которая дает схожий с квантовой хромодинамикой фазовый портрет в терминах температуры  $T$  и химического потенциала  $\mu$ . Исследуется влияние конечной температуры, ненулевого химического потенциала и параллельного магнитного поля на фазовую структуру модели. Было показано, что химический потенциал и параллельное магнитное поле приводят к появлению сверхпроводящей фазы в системе.

Влияние магнитного поля на систему вводится следующим образом. Так как возбуждениями произвольной системы конденсированного состояния вещества обычно являются электроны (квазичастицы) с  $\pm 1/2$  проекциями спина на направление внешнего магнитного поля, то существуют два независимых способа введения в рассмотрение внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  в эти системы: 1) когда  $\vec{B}$  взаимодействует только с орбитальным моментом импульса электронов (заметим, что в планарных системах только перпендикулярная компонента  $\vec{B}_\perp$  внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  оказывает влияние на систему в этом случае), и 2) когда в дополнение к этому учитывается зеемановское взаимодействие спина электрона (или его собственного магнитного момента), введенного как дополнительная степень свободы, с магнитным полем  $\vec{B}$ . В диссертационной работе использовались оба способа.

Ранее в терминах  $(2+1)$ -мерной модели типа Гросса-Неве было показано, что киральная симметрия модели спонтанно нарушается при произвольных значениях перпендикулярного магнитного поля даже при бесконечно малых значениях константы связи, что получило название эффекта магнитного катализа.

В этих работах использовался только первый способ, в котором учитывалось только перпендикулярное магнитное поле. В диссертации исследуется эффект магнитного катализа и другие магнитные явления в рамках  $(2+1)$ -мерной модели типа Гросса-Неве под влиянием произвольно наклонного внешнего магнитного поля  $\vec{B}$  в случае учета обоих способов. Показано, что учет зеемановского взаимодействия заметно меняет поведение системы под влиянием внешнего магнитного поля.

Исследуется  $(2+1)$ -мерная модель Гросса-Неве с одним компактифицированным измерением под влиянием внешнего магнитного поля, направленного вдоль некомпактифицированного измерения, при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем. В этом случае магнитное поле оказывает влияние на систему не только посредством взаимодействия со спином, но также через постоянный векторный потенциал, направленный вдоль компактифицированного измерения, входящий в ковариантную производную, который приводит к появлению фазы Ааронова-Бома, пропорциональной потоку сквозь цилиндр. В общем случае из-за компактности одного измерения этот потенциал не может быть убран с помощью калибровочного преобразования.

### Цель

Целью данной работы является изучение возникновения различных фаз, сверхпроводящей (нарушения  $U(1)$  симметрии), фазы с нарушенной киральной симметрией, симметричной фазы, и фазовых переходов между ними в рамках модифицированной трехмерной модели Гросса-Неве. Изучение влияния внешнего магнитного поля, химического потенциала, температуры и компактификации одного пространственного измерения на фазовый портрет системы в рамках трехмерной модели Гросса-Неве с учетом зеемановского взаимодействия (взаимодействия магнитного поля со спином электронов).

### Научная новизна

В диссертационной работе впервые был вычислен термодинамический потенциал  $(2+1)$ -мерной модели типа Гросса-Неве с двумя каналами взаимодействия, киральным и сверхпроводящим, при конечной температуре, ненулевом

химическом потенциале и внешнем параллельном магнитном поле. На его основе был исследован фазовый портрет модели и было обнаружено, что при любой температуре ненулевой химический потенциал и параллельное магнитное поле приводят к появлению в системе сверхпроводящего конденсата. Было исследовано поведение системы при ненулевых химическом потенциале и параллельном магнитном поле одновременно и было обнаружено, что в этом случае появляются две фазы с нарушенной киральной симметрией с нулевой и ненулевой плотностью числа частиц и намагниченностью.

Впервые исследовано влияние произвольно направленного магнитного поля на спонтанное нарушение киральной симметрии в  $(2+1)$ -мерной модели типа Гросса-Неве с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем. Показано, что при некоторых условиях достаточно слабое внешнее магнитное поле индуцирует спонтанное нарушение киральной симметрии, а при увеличении магнитного поля или его наклоне киральная симметрия восстанавливается. Таким образом, эффект магнитного катализа может иметь место только при малых значениях магнитного поля. Было обнаружено, что имеет место эффект осцилляции намагниченности при малых значениях перпендикулярного системе магнитного поля. Более того, было обнаружено скачкообразное поведение динамической массы фермионов в зависимости от внешнего магнитного поля, то есть эволюция системы при изменении магнитного поля сопровождается несколькими различными фазами с нарушенной киральной симметрией, диамагнитной и парамагнитной.

Впервые было получено выражение для термодинамического потенциала  $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве с одним компактифицированным измерением под влиянием внешнего магнитного поля, направленного вдоль некомпактифицированного измерения, при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем. Была исследована фазовая структура модели в этом случае.

### **Апробация работы**

Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

Научная сессия-конференция ЯФ ОФН РАН "Физика фундаментальных взаимодействий", Протвино, ИФВЭ, 2013

18th International Seminar on High Energy Physics, QUARKS-2014, Suzdal, Russia, 2014

International conference on New frontiers in physics, Kolimbary, Crete 2014

International conference on New frontiers in physics, Kolimbary, Crete 2015

## **Публикации**

Основные результаты диссертации изложены в 5 опубликованных работах, список которых приводится в конце автореферата.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из Введения, четырех основных глав, Заключения и Приложения. Полный объем диссертации составляет 136 страниц. Список литературы включает 143 ссылки.

## **Основное содержание работы**

### **Глава 1. Введение**

В данной главе рассматриваются предпосылки, послужившие причиной исследований, проведенных в диссертации. Приведен обзор основных моделей с четырехфермионным взаимодействием таких, как модель Гросса-Неве и Намбу–Йона-Лазинио, в случае различных размерностей пространства-времени при различных внешних условиях. Описана модель с двумя каналами взаимодействия, киральным и сверхпроводящим, в случае  $(1+1)$ -мерного пространства-времени, так называемая модель Ходоса, которая рассматривается в диссертации в случае  $(2+1)$ -мерного пространства-времени. Показано, что модель Гросса-Неве имеет много общих свойств с квантовой хромодинамикой (КХД), и обсуждается возможность применения низкоразмерных моделей типа Гросса-Неве для моделирования КХД. Показано, что возбуждения в графене описываются уравнением Дирака, а не уравнением Шредингера, и обсуждается возможность применения моделей с четырехфермионным взаимодействием к описанию некоторых систем конденсированного состояния вещества.

## Глава 2. Влияние химического потенциала на появление сверхпроводящей фазы в (2+1)-мерной модели Ходоса

В этой главе изучаются фазовые переходы в (2+1)-мерной модели Гросса-Неве, которая описывает борьбу между двумя явлениями: нарушением киральной симметрии (образование экзитонных пар) и сверхпроводимостью (образование куперовских пар). Такая модель может использоваться для качественного анализа сверхпроводящей фазы в квазипланарных системах конденсированного состояния вещества. Наша модель является прямым обобщением известной (1+1)-мерной модели Ходоса.

В **разделе 2.1** рассматривается возможность применения результатов этой главы при исследовании квазипланарных систем конденсированного состояния вещества.

В **разделе 2.2** описана (2+1)-мерная модель типа Гросса-Неве с четырехфермионными взаимодействиями в фермион-антифермионном (или киральном) и фермион-фермионном (или сверхпроводящем) каналах.

Лагранжиан модели имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \left( \gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 \right) \psi_k + \frac{G_1}{N} \left( \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k \right)^2 + \\ & + \frac{G_2}{N} \left( \sum_{k=1}^N \psi_k^T C \psi_k \right) \left( \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j C \bar{\psi}_j^T \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mu$  химический потенциал. Все фермионные поля  $\psi_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) принадлежат фундаментальному представлению группы  $O(N)$ . Более того, каждое поле  $\psi_k$  это четырехкомпонентный дираковский спинор.  $\gamma^\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2$ ) принадлежат приводимому 4-мерному представлению спиноров.  $C \equiv \gamma^2$  это матрица зарядового сопряжения. Модель (1) инвариантна относительно дискретного кирального преобразования  $\psi_k \rightarrow \gamma^5 \psi_k$ , а также относительно преобразований из непрерывной группы числа фермионов  $U(1)$ ,  $\psi_k \rightarrow \exp(i\alpha) \psi_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ), ответственной за сохранение числа фермионов.

Получен неперенормированный термодинамический потенциал модели в ведущем порядке приближения больших  $N$ .

В **разделе 2.3** получен перенормированный термодинамический потенциал при нулевой температуре и ненулевом химическом потенциале.

В разделе 2.4 рассматривается фазовая структура модели при нулевой температуре.

В подразделе 2.4.1 рассматривается фазовый портрет в случае нулевого химического потенциала. В терминах перенормированных констант связи получается следующий фазовый портрет. При  $G_1 < G_c$  и  $G_2 < G_c$  реализуется симметричная фаза I. Если  $G_1 > G_c$ ,  $G_2 < G_c$  ( $G_1 < G_c$ ,  $G_2 > G_c$ ), тогда реализуется фаза с нарушенной киральной симметрией II (сверхпроводящая фаза III). При  $G_1 > G_c$ ,  $G_2 > G_c$ ,  $G_1 > G_2$  ( $G_1 < G_2$ ) мы имеем фазу II с нарушенной киральной симметрией (сверхпроводящую фазу III).

В подразделе 2.4.2 рассматривается влияние химического потенциала на фазовую структуру модели.

Здесь выделяется два качественно разных случая,  $g_1 < 0$  и  $g_1 > 0$ . Для случая, когда  $g_1 < 0$ , при  $g_2 > 0$  или при  $g_2 < g_1$  в системе реализуется фаза II с нулевой плотностью числа частиц при достаточно малых значениях химического потенциала  $\mu$ . В этом случае вакуумное состояние системы является пустым пространством. Затем при некотором критическом значении  $\mu = \mu_{crit}$  в пространстве могут появиться пузыри новой фазы III с плотностью числа частиц  $n_{crit}$ , и для всех  $\mu > \mu_{crit}$  все пространство заполнено сверхпроводящей фазой, в которой плотность числа частиц  $n$  отлична от нуля  $n > n_{crit}$ . При  $g_1 > 0$  система находится в сверхпроводящей фазе даже при бесконечно малых значениях  $\mu$ . При нулевой температуре ( $T = 0$ ) химический потенциал в любом случае приводит к тому, что система переходит в сверхпроводящую фазу.

В разделе 2.5 получен перенормированный термодинамический потенциал при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале. Рассмотрен фазовый портрет модели в этом случае. Для того чтобы избежать запрета на спонтанное нарушение непрерывной симметрии в (2+1)-мерных квантовых теориях поля при  $T > 0$ , мы рассматривали фазовую структуру нашей модели в ведущем порядке приближения больших  $N$ , то есть в пределе  $N \rightarrow \infty$ , где  $N$  - число фермионных полей.

Фазовый портрет системы в этом случае представлен на Рис. 1, 2. Из этих рисунков ясно, что при фиксированном значении химического потенциала  $\mu$  с увеличением температуры восстанавливается симметричная фаза. Однако, при произвольном фиксированном  $T$ , увеличение химического потенциала приво-

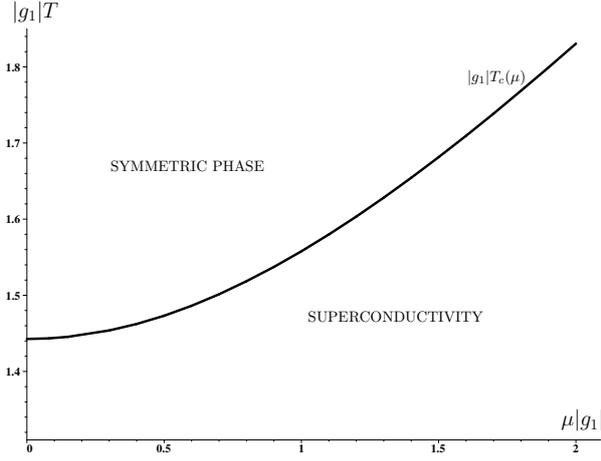


Рисунок 1 — Фазовая диаграмма модели в плоскости  $(\mu, T)$  при  $g_2 = -0.5|g_1|$  и произвольном фиксированном  $g_1$  в обоих случаях, как при  $g_1 < 0$ , так и при  $g_1 > 0$ .

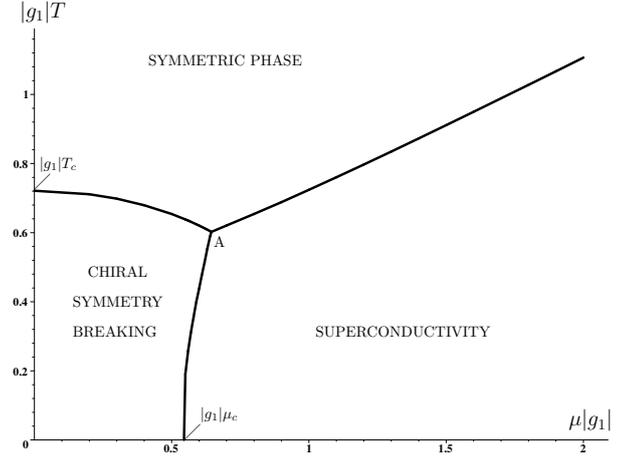


Рисунок 2 — Фазовый портрет в терминах  $(\mu, T)$  при  $g_2 = -1.5|g_1|$  и при  $g_1 < 0$ . Все кривые являются фазовыми переходами II рода, за исключением границы между сверхпроводящей фазой и фазой с нарушенной киральной симметрией, где происходит фазовый переход I рода.

дит к появлению сверхпроводимости в системе при произвольном соотношении между константами связи  $g_1$  и  $g_2$ .

В разделе 2.6 подведены итоги исследований, проведенных в главе 2, и перечислены основные результаты и выводы. Тот факт, что при любой температуре химический потенциал индуцирует явление сверхпроводимости, является основным результатом этой главы. Заметим, что в  $(1+1)$ -мерном случае в сверхпроводящую фазу можно прийти при увеличении химического потенциала, только если температура меньше некоторой критической величины.

### Глава 3. Явление сверхпроводимости, индуцированное внешним параллельным магнитным полем в $(2+1)$ -мерной модели типа Гросса-Неве

В данной главе рассматривается  $(2+1)$ -мерная модель типа Гросса-Неве, которая описывает четырехфермионное взаимодействие квазичастиц со спиной  $1/2$  (электронов) как в киральном (с константой связи  $G_1$ ), так и в сверхпро-

водящем (с константой связи  $G_2$ ) каналах при нулевой температуре  $T = 0$  и ненулевом химическом потенциале  $\mu \neq 0$ . Мы предполагаем, что планарная система, то есть плоскость, на которой задана модель Гросса-Неве, находится во внешнем магнитном поле  $\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel$  таким образом, что  $\vec{B}_\perp = 0$ . В результате в нашем рассмотрении внешнее магнитное поле  $\vec{B}$  взаимодействует только со спинами электронов, но не с их орбитальными моментами импульса. Эта модель является обобщением модели, рассмотренной в главе 2, на случай, когда фермионы обладают спином (введенным таким же образом, как в уравнении Паули).

В разделе 3.1 обсуждается введение взаимодействия магнитного поля со спином электронов. В этом разделе также описана структура этой главы.

В разделе 3.2 описывается рассматриваемая модель, ее лагранжиан имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \left[ \gamma^\rho i \partial_\rho + \mu \gamma^0 - \nu (-1)^k \gamma^0 \right] \psi_{ka} + \frac{G_1}{N} \left( \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \psi_{ka} \right)^2 + \\ + \frac{G_2}{N} \left( \sum_{k=1}^2 \psi_{ka}^T C \psi_{ka} \right) \left( \sum_{j=1}^2 \bar{\psi}_{jb} C \bar{\psi}_{jb}^T \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где предполагается суммирование по повторяющимся индексам  $a, b = 1, \dots, N$  внутренней группы  $O(N)$  и по повторяющимся индексам группы Лоренца  $\rho = 0, 1, 2$ . Для каждого фиксированного  $k = 1, 2$  и  $a = 1, \dots, N$  величины  $\psi_{ka}(x)$  в (2) обозначают безмассовое дираковское фермионное поле, преобразующееся по приводимому 4-компонентному спинорному представлению  $(2+1)$ -мерной группы Лоренца. Более того, все дираковские поля  $\psi_{ka}(x)$  представляют собой два фундаментальных мультиплетта  $\psi_{1a}(x)$  и  $\psi_{2a}(x)$  ( $a = 1, \dots, N$ ) внутренней группы  $O(N)$ . Мы предполагаем, что спинорные поля  $\psi_{1a}(x)$  и  $\psi_{2a}(x)$  ( $a = 1, \dots, N$ ) соответствуют фермионам с проекцией спина  $1/2$  и  $-1/2$  на направление внешнего магнитного поля, соответственно. В (2)  $\mu$  химический потенциал, соответствующий числу фермионов (разнице числа фермионов и антифермионов), и  $\nu$  член введен для того, чтобы учесть энергию зеемановского взаимодействия электронов с внешним магнитным полем  $\vec{B}_\parallel$ . Таким образом, в нашем случае  $\nu = g\mu_B B/2$ , где  $B = |\vec{B}_\parallel|$ ,  $g$  - спектроскопический фактор Ланде ( $g = 2$ ) и

$\mu_B = \frac{e}{2m_e}$  - магнетон Бора. Более того,  $C \equiv \gamma^2$  это матрица зарядового сопряжения.

Получен неперенормированный термодинамический потенциал модели в ведущем порядке приближения больших  $N$ .

В разделе 3.3 получено выражение для перенормированного термодинамического потенциала при ненулевых химическом потенциале и параллельном магнитном поле.

В разделе 3.4 рассматривается фазовая структура модели.

Получены выражения для плотности числа частиц  $n$ , намагниченности  $m$  и магнитной восприимчивости  $\chi$  в различных фазах системы. Исследовано поведение этих величин при изменении магнитного поля.

При  $g_1 > 0$  при произвольных ненулевых значениях  $\mu$  и/или  $B$  в системе всегда реализуется сверхпроводящая фаза III. Так как при  $g_2 < 0$  это явление имело место даже при  $\mu = 0$  и  $B = 0$ , мы можем говорить, что химический потенциал и/или магнитное поле усиливают сверхпроводимость, которая изначально была вызвана довольно сильным взаимодействием в фермион-фермионном канале ( $G_2 > G_c$ ). В противоположном случае, при  $g_2 > 0$ , система находится в симметричной фазе при  $\mu = 0$  и  $B = 0$ . Однако, произвольно малые ненулевые значения  $\mu$  и/или  $B$  индуцируют в этом случае сверхпроводимость.

В случае  $g_1 < 0$  фазовый портрет модели в плоскости  $(\mu, B)$  намного богаче, чем в случае  $g_1 > 0$ . Для  $g_2 = -1.5|g_1|$  фазовый портрет модели в терминах  $(\mu, B)$  приведен на Рис. 3. В этом случае в фазе с нарушенной киральной симметрией как плотность числа частиц  $n$ , так и намагниченность  $m$  равны нулю. Качественно подобная фазовая структура имеет место для всех значений константы связи  $g_2$  из интервала  $g_2 \in (-k|g_1|, -|g_1|)$ , где  $k \approx 3.08$ . Однако, если  $g_2 > 0$  или  $g_2 < -k|g_1|$ , то ситуация качественно меняется. В этом случае при  $g_2 = 0.5|g_1|$  фазовый портрет модели представлен на Рис. 4. Из рисунка видно, что фаза с нарушенной киральной симметрией II делится на две области, обозначенные II<sub>1</sub> и II<sub>2</sub>. В области II<sub>1</sub> величины  $n$  и  $m$  равны нулю, в то время как в области II<sub>2</sub> они отличны от нуля  $n \neq 0$  и  $m \neq 0$ .

В разделе 3.5 подведены итоги исследований, проведенных в главе 3. Основным выводом является то, что внешнее магнитное поле в плоскости системы  $\vec{B}_{\parallel}$  способствует возникновению парамагнитной сверхпроводимости в системе.

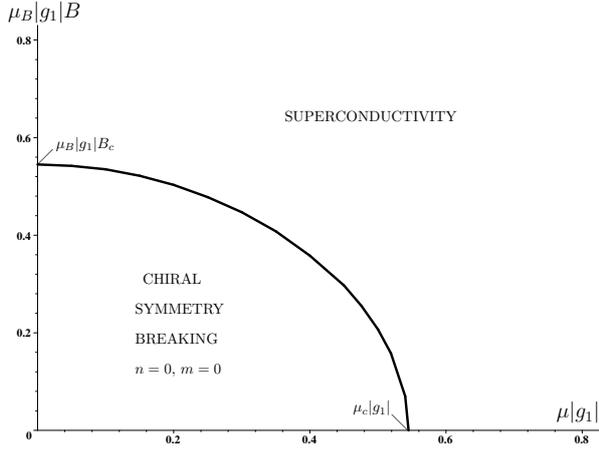


Рисунок 3 — Фазовый портрет модели в плоскости  $(\mu, B)$  при произвольных фиксированных  $g_1 < 0$  и  $g_2 = -1.5|g_1|$ .

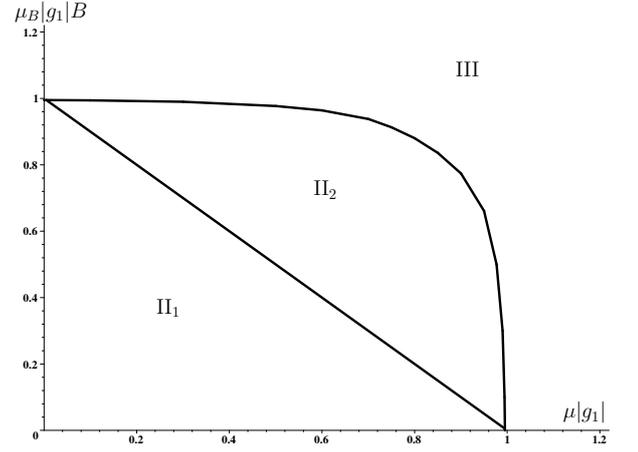


Рисунок 4 — Фазовый портрет в плоскости  $(\mu, B)$  при  $g_1 < 0$  и  $g_2 = 0.5|g_1|$ .  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  - фазы с нарушенной киральной симметрией с  $n = 0, m = 0$  и  $n \neq 0, m \neq 0$ , соответственно. III - сверхпроводящая фаза.

Мы надеемся, что результаты этой и предыдущей глав могут пролить свет на явление сверхпроводимости в системах с планарной структурой в физике конденсированного состояния вещества.

#### Глава 4. Нарушение киральной симметрии в $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве с учетом зеемановского взаимодействия с внешним наклонным магнитным полем

Мы полагаем, что некоторая физическая система располагается в двумерной плоскости, перпендикулярно оси  $\hat{z}$  обычного пространства-времени. Более того, присутствует внешнее однородное, не зависящее от времени магнитное поле  $\vec{B}$ , направленное под наклоном к данной плоскости. Соответствующий  $(3+1)$ -мерный векторный потенциал  $A_\mu$  задан формулами  $A_{0,1} = 0$ ,  $A_2 = B_\perp x$ ,  $A_3 = B_\parallel y$ , то есть пространственные компоненты  $B_{x,y,z}$  внешнего магнитного поля имеют вид  $B_x = B_\parallel$ ,  $B_y = 0$ ,  $B_z = B_\perp$ . Мы предполагаем, что данная плоская физическая система состоит из квазичастиц (электронов) с двумя проекциями спина  $\pm 1/2$  на направление внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ . Также пред-

полагается, что их низкоэнергетическая динамика описывается (2+1)-мерной моделью Гросса-Неве.

В **разделе 4.1** дается краткий обзор работ, в которых изучалось влияние магнитного поля на модели типа Гросса-Неве. В них было показано, что под влиянием перпендикулярного магнитного поля  $\vec{B}_\perp$  киральная симметрия модели спонтанно нарушается при произвольных значениях магнитного поля даже при бесконечно малых значениях константы связи, а под влиянием параллельного магнитного поля при достаточно больших значениях  $\vec{B}_\parallel$  восстанавливается киральная симметрия модели. В результате такого разного влияния  $\vec{B}_\perp$  и  $\vec{B}_\parallel$  стало интересно исследовать влияние на модель Гросса-Неве произвольно наклонного магнитного поля.

В **разделе 4.2** описывается рассматриваемая модель, ее лагранжиан имеет следующий вид

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \left[ \gamma^0 i \partial_t + \gamma^1 i \nabla_1 + \gamma^2 i \nabla_2 - \nu (-1)^k \gamma^0 \right] \psi_{ka} + \frac{G}{N} \left( \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \psi_{ka} \right)^2, \quad (3)$$

где  $\nabla_{1,2} = \partial_{1,2} + ieA_{1,2}$ . Остальные обозначения совпадают с обозначениями, введенными в главе 3.

В **подразделах 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3** рассмотрены частные случаи ( $B_\perp = 0$ ,  $\nu \neq 0$ ), ( $\nu = 0$ ,  $B_\perp \neq 0$ ), ( $\nu \neq 0$ ,  $B_\perp \neq 0$ ), соответственно. Получено выражение для перенормированного термодинамического потенциала в этих случаях.

В **разделе 4.3** рассмотрен случай  $g > 0$ .

В **подразделе 4.3.1** рассматривается фазовая структура модели при  $g > 0$ .

С учетом зеемановского взаимодействия при  $g > 0$  существует критическая константа связи  $g_c = 2\mu_B/e$  такая, что при  $g > g_c$  произвольное достаточно слабое внешнее магнитное поле  $\vec{B}$  индуцирует спонтанное нарушение киральной симметрии при условии, что отклонение от вертикали  $\vec{B}$  не такое большое и  $|\vec{B}| < B_c(g)$ , где  $0 < B_c(g) < \infty$  (см. Рис. 5). При  $0 < g < g_c$  киральная симметрия не может быть нарушена внешним магнитным полем. (В противоположность этому, без учета зеемановского взаимодействия при любых значениях  $g > 0$  нарушение киральной симметрии индуцируется произвольным внешним магнитным полем  $\vec{B}$ , таким что  $\vec{B}_\perp \neq 0$ .)

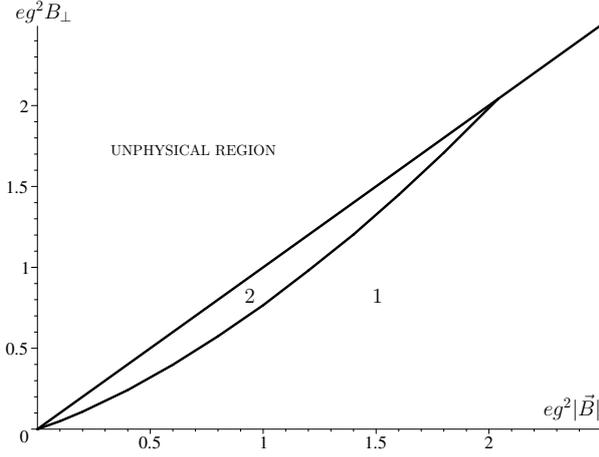


Рисунок 5 — Случай  $g > 0$ :  
Фазовый портрет в терминах  $(|\vec{B}|, B_\perp)$  при  $g = 5g_c \equiv 10\mu_B/e$ . 1 и 2 - кирально симметричная фаза и фаза с нарушенной киральной симметрией. В нефизической области  $B_\perp > |\vec{B}|$ . На границе между фазами 1 и 2 - фазовый переход I рода.

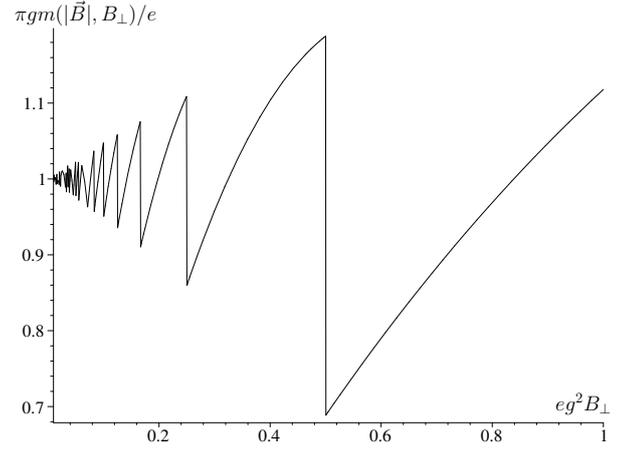


Рисунок 6 — Случай  $g > 0$ :  
Намагниченность  $m(|\vec{B}|, B_\perp)$  в зависимости от  $B_\perp$  при фиксированном  $eg^2|\vec{B}| = 1$  и  $g = 0.5g_c \equiv \mu_B/e$ .

Предположим, что  $g > g_c > 0$  и что киральная симметрия нарушена, то есть  $\vec{B}$  имеет достаточно большую компоненту  $B_\perp$ . Тогда киральная симметрия может быть восстановлена простым наклоном внешнего магнитного поля по отношению к плоскости системы, то есть без увеличения модуля магнитного поля  $|\vec{B}|$  (см. Рис. 5).

В подразделе 4.3.2 рассматривается поведение намагниченности при малых значениях перпендикулярного магнитного поля. Исследования показали, что при  $g > 0$  и  $|\vec{B}| \neq 0$  в модели с учетом зеемановского взаимодействия можно наблюдать эффекты осцилляции намагниченности в области малых значений  $B_\perp$  (см. Рис. 6). Заметим, что явление магнитной осцилляции де Гааза-ван Альфена достаточно типичное явление физики конденсированного состояния вещества и плотной релятивистской материи. Они обычно происходят при ненулевом химическом потенциале. В нашей (2+1)-мерной системе (3) это явление индуцируется (при нулевом химическом потенциале) наклоном внешнего магнитного поля.

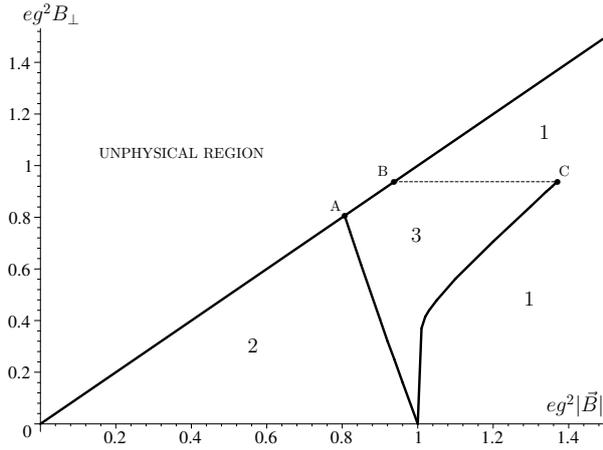


Рисунок 7 — *Случай  $g < 0$* :  
 Фазовый портрет в терминах  
 $(|\vec{B}|, B_{\perp})$  при  $|g| = \mu_B/e$ . 1 -  
 кирально симметричная фаза, 2 и  
 3 - фазы с нарушенной киральной  
 симметрией. На линии BC -  
 фазовый переход II рода, на  
 других линиях - фазовый переход I  
 рода. Нефизическая область на  
 графике соответствует  $B_{\perp} > |\vec{B}|$ .

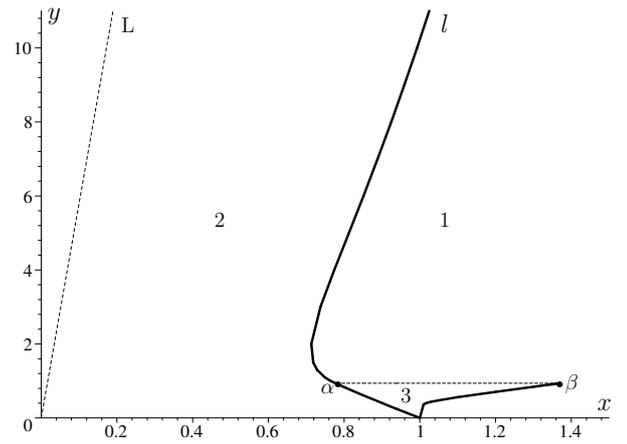


Рисунок 8 — *Случай  $g < 0$* :  
 Фазовая диаграмма в терминах  
 $(x, y)$ , где  $x = \mu_B |\vec{B}| |g|$  и  
 $y = eg^2 B_{\perp}$ , типичная для  
 $c \equiv e|g|/\mu_B > c^* \approx 28$ . Физическая  
 область лежит под и/или справа от  
 линии  $L = \{(x, y) : y = cx\}$ . На  
 сплошных линиях - фазовый  
 переход I рода. На линии  $\alpha\beta$  -  
 фазовый переход II рода.

В разделе 4.4 рассмотрен случай  $g < 0$ .

В подразделе 4.4.1 рассматривается фазовый портрет в частном случае  $|g| = \mu_B/e$  (Рис. 7), а в подразделе 4.4.2 рассматривается фазовый портрет в общем случае при произвольном соотношении между  $|g|$  и  $\mu_B$  (Рис. 8) (в этом случае удобно использовать новые безразмерные параметры,  $x = \mu_B |\vec{B}| |g|$  и  $y = eg^2 B_\perp$ ).

При учете зеемановского взаимодействия фазовый портрет модели содержит, по крайней мере, две фазы с нарушенной киральной симметрией, обозначенные как 2 и 3 (Рис. 7, Рис. 8). В фазе 2, которая является диамагнитной, магнитное поле усиливает нарушение киральной симметрии, в то время как в парамагнитной фазе 3 киральный конденсат уменьшается с увеличением внешнего магнитного поля. Более того, если параметр  $c \equiv e|g|/\mu_B < c^* \approx 28$ , то при достаточно больших значениях  $|\vec{B}|$  (даже в перпендикулярном магнитном поле) в модели происходит восстановление киральной симметрии. При  $g < 0$  без учета зеемановского взаимодействия существует только диамагнитная фаза 2 с усилением нарушения киральной симметрии при произвольных значениях и направлениях  $\vec{B}$  таких, что  $B_\perp > 0$ .

Критическая кривая  $l$  на Рис. 8 может быть экстраполирована в области значений  $y \equiv eg^2 B_\perp$ :  $11 < y < 30$  прямой линией с коэффициентом наклона  $c^* \approx 28$ . Видно, что при  $g < 0$  и  $c \equiv e|g|/\mu_B > c^*$  прямая  $l$  на Рис. 8 не пересекает ни одну из критических кривых фазового портрета. В этом случае при произвольном перпендикулярном магнитном поле киральная симметрия не может быть восстановлена. Однако, увеличивая угол наклона магнитного поля от перпендикулярного направления, возможно восстановить симметрию. Проведенные численные оценки показывают, что именно такая ситуация реализуется для планарных систем типа графена.

В разделе 4.5 проведены численные оценки в контексте физики конденсированного состояния вещества, из которых можно сделать вывод, что рассмотренные эффекты могут наблюдаться в реальных системах конденсированного состояния вещества при лабораторных значениях внешнего магнитного поля.

В разделе 4.6 подведены итоги исследований, проведенных в главе 4, и перечислены основные результаты.

## Глава 5. Нарушение киральной симметрии в трехмерной модели Гросса-Неве с компактификацией в присутствии магнитного поля

В данной главе рассматривается модель Гросса-Неве в случае пространства  $R^2 \times S^1$  в присутствии внешнего магнитного поля, направленного вдоль некомпактифицированного измерения, в случае конечных температур и ненулевого химического потенциала.

В разделе 5.1 показывается, что в случае пространства с компактифицированными измерениями постоянный векторный потенциал, направленный вдоль компактифицированного измерения, не может быть убран с помощью калибровочного преобразования.

В разделе 5.2 описывается рассматриваемая модель, лагранжиан модели имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^s i \gamma^\mu D_\mu \psi^s + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}^s \psi^s)^2 + \mu \bar{\psi}^s \gamma^0 \psi^s + \frac{\sigma_s}{2} g \mu_B B \bar{\psi}^s \gamma^0 \psi^s. \quad (4)$$

В этой главе мы будем работать в неприводимом представлении. Спиновый индекс  $s$  пробегает значения 1 и 2. Взаимодействие поля  $B$  со спином введено, как и в предыдущей главе, посредством последнего члена в лагранжиане, где  $\sigma_{1,2} = \pm 1$ ,  $\mu_B$  - магнитный момент и  $B$  - магнитное поле. Ковариантная производная  $D_\mu$  :  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ . Векторный потенциал  $A_\mu$  имеет компоненты:  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = const$ . На  $\psi$  наложены следующие граничные условия:

$$\psi(x^0, x^1, x^2 + L) = e^{2\pi i \alpha} \psi(x^0, x^1, x^2). \quad (5)$$

Магнитное поле взаимодействует со спином электрона посредством зеемановского взаимодействия. Кроме того, постоянная компонента векторного потенциала, входящая в ковариантную производную, дает такой же вклад в термодинамический потенциал, как соответствующая фаза  $\alpha$  из граничных условий (5), то есть импульс, соответствующий компактифицированному измерению, имеет вид  $\frac{2\pi}{L}(n + \alpha - \phi)$ , где  $\phi = \frac{eLA_2}{2\pi} = \frac{e\pi L^2 B}{8\pi}$  - фаза Ааронова-Бома.

В разделе 5.3 получено выражение для перенормированного термодинамического потенциала модели.

В разделе 5.4 получено другое выражение для термодинамического потенциала, для которого  $\left. \frac{d^2 \Omega}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0}$  является явно конечной при любых значениях  $\alpha$ ,

что делает удобным численные исследования фазового портрета при  $\alpha - \phi = n$ , где  $n$  - целое число. Выражение, полученное в предыдущем разделе, содержало два расходящихся члена при таких значениях  $\alpha - \phi$ , расходимости которых сокращались, что делало неудобным численные исследования в этих точках.

В **разделе 5.5** было проведено исследование фазового портрета модели без учета зеемановского взаимодействия.

В случае периодических граничных условий ( $\alpha = 0$ ) ненулевой магнитный поток может восстановить киральную симметрию при малой температуре.

В случае антипериодических граничных условий ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ) фазовый портрет системы является симметричным в плоскости  $(L, \beta)$ , то есть уменьшение радиуса компактификации  $L$ , как и увеличение температуры, восстанавливает киральную симметрию системы. В этом случае при определенных условиях магнитной поток может нарушить киральную симметрию.

При любых граничных условиях при больших магнитных полях есть область радиусов компактифицированного измерения, где симметрия может восстанавливаться или нарушаться несколько раз при незначительных изменениях радиуса.

В **разделе 5.6** для исследования термодинамического потенциала системы был использован метод  $\zeta$ -регуляризации.

В **разделе 5.7** подведены итоги исследований и сделаны некоторые численные оценки в контексте применения к углеродным трубкам.

## Заключение

В **заключении** перечислены полученные результаты и кратко сформулированы основные выводы диссертации.

## Приложения

В разделе **Приложения** приведены некоторые существенные вычисления, использующиеся в различных главах диссертации, которые были вынесены отдельно для удобства.

## Основные результаты диссертации

- Рассмотрена модель типа Гросса-Неве с двумя каналами взаимодействия, киральным и сверхпроводящим, в случае  $(2+1)$ -мерного пространства-времени с учетом ненулевого химического потенциала и конечной температуры. Впервые получено выражение для термодинамического потенциала и полностью рассмотрен фазовый портрет этой модели. Рассмотрение показало что, смешанная фаза (фаза, в которой оба конденсата, киральный и сверхпроводящий, отличны от нуля) не появляется. При фиксированном химическом потенциале с увеличением температуры восстанавливается симметричная фаза. При произвольном фиксированном  $T$  (в том числе при  $T = 0$ ), увеличение химического потенциала приводит к появлению сверхпроводящего конденсата в системе, в отличие от случая  $(1+1)$ -мерного пространства-времени. Вычислены плотности числа частиц в различных фазах в случае  $T = 0$ . Плотность числа частиц возникает при переходе в сверхпроводящую фазу, а в фазе с нарушенной киральной симметрией плотность числа частиц равна нулю.
- Рассмотрено влияние параллельного магнитного поля на  $(2+1)$ -мерную модель типа Гросса-Неве с двумя каналами взаимодействия с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем. Показано, что параллельное системе магнитное поле, как и химический потенциал, приводит к появлению в системе сверхпроводящего конденсата. В случае отличных от нуля химического потенциала и параллельного магнитного поля появляются две фазы с нарушенной киральной симметрией с нулевой и ненулевой плотностью частиц и намагниченностью. Сверхпроводящая фаза в модели сопровождается появлением намагниченности. Индуцированный магнитный момент системы и внешнее магнитное поле имеют одно и то же направление, то есть сверхпроводящая фаза является парамагнитной, а не диамагнитной, как в обычных сверхпроводниках.
- Рассмотрено влияние произвольно направленного магнитного поля на спонтанное нарушение киральной симметрии в  $(2+1)$ -мерной модели типа Гросса-Неве с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем.

- При  $g > 0$  существует критическая константа связи  $g_c$  такая, что при  $g > g_c$  произвольное достаточно слабое внешнее магнитное поле  $\vec{B}$  индуцирует спонтанное нарушение киральной симметрии при условии, что отклонение от вертикали  $\vec{B}$  и его модуль не слишком велики. При увеличении магнитного поля или его наклоне киральная симметрия восстанавливается. При  $0 < g < g_c$  киральная симметрия не может быть нарушена внешним магнитным полем. Таким образом, эффект магнитного катализа может иметь место только при малых значениях магнитного поля. В случае  $g < 0$  существует две фазы с нарушенной киральной симметрией, диамагнитная и парамагнитная.
- Показано, что имеет место эффект осцилляции намагниченности при малых значениях  $B_{\perp}$  в случае  $g > 0$  и  $|\vec{B}| \neq 0$ .
- Получено выражение для термодинамического потенциала  $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве с одним компактифицированным измерением под влиянием внешнего магнитного поля, направленного вдоль некомпактифицированного измерения, при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале с учетом взаимодействия спина электронов с магнитным полем. Исследована фазовая структура модели.
- Численные оценки показывают, что рассмотренные эффекты могут наблюдаться в реальных системах конденсированного состояния вещества при лабораторных значениях внешнего магнитного поля.

## Публикации автора по теме диссертации

Основное содержание диссертации и результаты выполненных исследований опубликованы в следующих работах:

1. K.G. Klimenko, R.N. Zhokhov and V.C. Zhukovsky, Superconducting phase transitions induced by chemical potential in (2+1)-dimensional four-fermion quantum field theory // Phys. Rev. D **86**, 105010 (2012).

2. K.G. Klimenko, R.N. Zhokhov, V.Ch. Zhukovsky, Superconductivity phenomenon induced by external in-plane magnetic field in (2+1)-dimensional Gross-Neveu type model // Mod. Phys. Lett. A **28**:1350096 (2013).

3. K.G. Klimenko, R.N. Zhokhov, Magnetic catalysis effect in the (2+1)-dimensional Gross-Neveu model with Zeeman interaction // Phys. Rev. D **88**, 105015 (2013).

4. R. N. Zhokhov, V. Ch. Zhukovsky, P. B. Kolmakov, The Zeeman effect in a modified Gross–Neveu model in (2 + 1)-dimensional space–time with compactification // Moscow University Physics Bulletin **70**, 4, pp 226-231 2015

Р.Н. Жохов, В.Ч. Жуковский, П.Б. Колмаков, Эффект Зеемана в модифицированной модели Гросса–Невё в (2+1)-мерном пространстве–времени с компактификацией // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2015. № 4. С. 12

5. K.G. Klimenko, R.N. Zhokhov, Magnetic catalysis effect in the (2+1)-dimensional Gross–Neveu model with Zeeman interaction, Proceedings // 2014, EPJ Web Conf. **95** 04080 (2015)