Введение в теорию групп и алгебр Ли

Задачи и упражнения к курсу, предлагавшиеся в 2016—2017 учебном году.

Лекция 1

1 Исходя из определения группы, доказать

а) единственность единичного элемента e и его перестановочность с любым элементом группы,

б) единственность обратного элемента g^{-1} и его перестановочность с элементом g,

в) соотношения $e^{-1} = e$, $(g^{-1})^{-1} = g$ и $(g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1}$.

2 Пусть H — подгруппа группы G и факторпространство G/H состоит из двух “точек” (смежных классов). Показать, что H — инвариантная подгруппа.

3 Пусть S — некоторое подмножество элементов группы G. Подмножество $C(S) = \{c \mid cs = sc, c \in G, s \in S\}$ называется *централизатором* S. Подможество $N(S) = \{n \mid nSn^{-1} = S, n \in G\}$ называется *нормализатором* S.

а) Показать, что централизатор $C(S)$ является подгруппой G.

б) Показать, что нормализатор $N(S)$ является подгруппой G и $C(S) \subset N(S)$.

в) Показать, что если S является подгруппой G, то $S \subset N(S)$ — инвариантная подгруппа $N(S)$.

4 Будем считать два элемента g_1 и g_2 из группы G эквивалентными, если найдется такой элемент $g \in G$, что $g_1 = g g_2 g^{-1}$. Доказать, что такое отношение удовлетворяет свойствам рефлексивности, симметричности и транзитивности, т.е., действительно, является отношением эквивалентности.

5 Доказать, что если любой элемент g из группы G удовлетворяет свойству $g^2 = e$, то G — абелева группа.

6 Доказать, что если в группе G существует элемент $g_0 \neq e$ со свойством $g_0^2 = e$ и он единственный, то $g g_0 = g_0 g$ для любого элемента $g \in G$.

7 Показать, что для любого элемента g конечной группы выполняется $g^n = e$, где $n \leq N$ и N — прядок[1)] группы.

8 Доказать, что любая конечная группа с числом элементов, не превышающих пяти является абелевой. (Указание: можно воспользоваться результатом предыдущего упражнения).

9 Доказать, что у бесконечной группы число подгрупп бесконечно.

10 Какая матричная группа порождается матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$?

11 Рассмотрим целочисленные матрицы $\left(\begin{smallmatrix} m & n \\ p & q \end{smallmatrix}\right)$. При каких условиях на целые числа m, n, p и q эти матрицы образуют группу?

12 Пусть R — группа действительных чисел по сложению, а Z — подгруппа целых чисел. Описать факторпространство R/Z.

13 Пусть R_0 — множество отличных от нуля действительных чисел, рассматриваемое как группа по умножению, а R_+ — подгруппа положительных чисел. Найти фактор-группу R_0/R_+.

[1)] Порядком конечной группы называется число ее элементов.

14 Пусть C_0 — множество отличных от нуля комплексных чисел, рассматриваемое как группа по умножению, а $U(1)$ — подгруппа комплексных чисел с модулем равным единице. Найти фактор-группу $C_0/U(1)$.

15 Пусть G — группа действительных матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} d_1 & a \\ 0 & d_2 \end{smallmatrix}\right)$ (a — любое число, а $d_1 d_2 \neq 0$).

а) Найти обратный элемент.

б) Найти центральную подгруппу.

в) Найти фактор-группу группы G по ее центральной подгруппе.

г) Показать, что множество H матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является инвариантной подрупппой.

д) Найти фактор группу G/H.

Лекция 2

1 Показать явным вычислением, что группа $Sol(3)$, образованная матрицами вида

$$\begin{pmatrix} d_1 & a & b \\ 0 & d_2 & c \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix},$$

является разрешимой, а ее подгруппа $Nil(3)$, состоящая из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является нильпотентной группой.

Указание: облегчить выкладки поможет тот факт, что произвольная верхнетреугольная матрица размера 3×3 представляется в виде произведения

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Доказать, что если в группе G имеется конечная последовательность

$$G^0 \equiv G \supset G^1 \supset \cdots \supset G^{n-1} \supset G^n = \{e\}$$

вложенных подгрупп со свойствами

1) G^i является инвариантной подгруппой каждой G^k, $k < i$;

2) все фактор-группы G^{i-1}/G^i — абелевы,

то такая последовательность совпадает с производным рядом, $G^i = G^{(i)}$, и группа G — разрешима.

3 Показать, что преобразование подобия $g : G \to gGg^{-1}$, задаваемое элементом $g \in G$, является автоморфизмом группы G.

4 Пусть G — конечная циклическая[2)] группа нечетного порядка, т.е. $G = \{a, a^2, \dots, a^N = e\}$, где N — нечетно. Доказать, что отображение группы в себя, задаваемое правилом $g \to g^2$, $g \in G$, является автоморфизмом.

[2)] Группа называется *циклической*, если она порождается одним элементом.

5 Доказать, что отображение группы в себя по правилу $g \to g^{-1}$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда группа абелева.

6 Вторая теорема об изоморфизме. Пусть в группе G имеются две подгруппы H и K, причем K — инвариантна. Доказать, что

а) HK, т.е. множество всех произведений hk, где $h \in H$ и $k \in K$, является подгруппой G;

б) пересечение $H \cap K$ является инвариантной подгруппой H и

в) фактор-группы $(HK)\big/K$ и $H\big/(H \cap K)$ изоморфны.

7 Третья теорема об изоморфизме. Пусть в группе G имеются две инвариантные подгруппы H и K, причем $K \subset H$. Доказать, что

а) фактор-группа $H\big/K$ является инвариантной подгруппой в $G\big/K$;

б) фактор-группа фактор-групп $(G\big/K)\big/(H\big/K)$ изоморфна фактор-группе $G\big/H$.

8 Показать, что прямое произведение двух конечных циклических групп, порядки которых — взаимно простые числа, является циклической группой.

9 Пусть в группе G_1 содержится инвариантная подгруппа H_1, а в группе G_2 — инвариантная подгруппа H_2. Убедиться, что $H_1 \times H_2$ — инвариантная подгруппа в $G_1 \times G_2$. Доказать, что факторгруппа $\big(G_1 \times G_2\big)\big/\big(H_1 \times H_2\big)$ изоморфна прямому произведению фактор-групп $G_1\big/H_1 \times G_2\big/H_2$.

10 Полупрямое произведение $K \ltimes H$ групп K и H состоит из множества пар (h, k) на котором задан или такой закон умножения:

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) = \big(k_1 k_2, h_1 \Phi_{k_1}(h_2)\big),$$

или такой:

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) = \big(k_1 k_2, \Phi_{k_2}(h_1) h_2\big),$$

где Φ_k — некоторый автоморфизм группы H, ассоциированный с элементом $k \in K$ ($k \to \Phi_k$ — гомоморфизм группы K в группу автоморфизмов H, $\Phi_{k_1 k_2} = \Phi_{k_1} \circ \Phi_{k_2}$).

Показать, что эти законы умножения удовлетворяют групповым свойствам, т.е.

а) показать ассоциативность;

б) показать существование единичного элемента (найти единичные элементы для каждого закона умножения);

в) показать существование обратного элемента (найти обратные элементы для каждого закона умножения).

В общем случае разные законы умножения на одном и том же множестве определяют разные группы. Показать, что группы, определяемые этими законами умножения, изоморфны.

Лекция (факультативная) о топологии и топологических группах

1 Построить все возможные топологии на множестве, состоящем из трех элементов. Какие из них удовлетворяют хаусдорфовой аксиоме отделимости, а какие нет? Перечислить в каждом топологическом пространстве замкнутые подмножества.

2 Пусть M — плоскость R^2. Показать, что $\emptyset$, M и все открытые круги с центром в начале координат ($|\bar{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} < a$, где a — любое число) образуют топологию. Сравнить ее со стандартной топологией на R^2 (какая сильнее?).

3 Является ли открытый интервал $(a, b) \subset R$ открытым подмножеством в объемлющем пространстве R^2 (в стандартной топологии)?

4 Привести примеры подможеств в R (со стандартной топологией), которые

а) замкнуты и представляют из себя пересечение бесконечного числа открытых подмножеств;

б) открыты и представляют из себя объединение бесконечного числа замкнутых подмножеств.

5 Рассмотрим R и систему подмножеств, каждое из которых является дополнением к какому-то конечному подмножеству. Показать, что такая система подмножеств совместно с $\emptyset$ и R задают топологию на R (топология Зарисского). Является ли R с такой топологией хаусдорфовым пространством? Сравнить топологию Зарисского и стандартную топологию на R.

6 Два топологических пространства считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм между ними. Доказать рефлексивность, симметричность и транзитивность.

7 Будем считать две точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из R^3 эквивалентными ($\bar{x} \sim \bar{y}$) , если их можно совместить поворотом относительно начала координат (ортогональным преобразованием из группы $SO(3)$). Описать факторпространство $R^3 / \sim$ (пространство орбит) и фактортопологию на нем, считая, что на R^3 задана стандартная топология.

8 Рассмотрим отображение $F : Z_+ \to R$ (Z_+ — множество неотрицательных целых чисел),

$$F(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } n \neq 0 \\ 0, & \text{если } n = 0 \end{cases} .$$

Далее рассматриваем Z_+ и $F(Z_+)$ (образ $Z+$ при отображении F) как топологические пространства с индуцированной топологией из R. Является ли отображение $\widetilde{F} : Z_+ \to$ $\to F(Z_+)$ (ограничение отображения F на $F(Z_+)$) непрерывным? Непрерывно ли обратное отображение $\widetilde{F}^{-1}$?

9 Доказать, что тождественное отображение (M, τ) в (M, τ') (τ и τ' — разные топологии, заданные на одном и том же множестве M) непрерывно тогда и только тогда, когда топология τ' слабее или эквивалентна топологии τ.

10 Пусть G — циклическая группа третьего порядка, т.е. $G = \{e, g, g^2\}$ и $g^3 = e$. Зададим на групповом множестве топологию $\tau = \{\emptyset, (e), (g), (e, g), G\}$. Является ли G топологической группой?

11 Пусть G — связная топологическая группа, а A и B — ее связные подмножества. Доказать, что подмножество AB, т.е. множество элементов вида ab, где $a \in A$ и $b \in B$, тоже связно.

12 Пусть G — связная топологическая группа, а A и B — ее компактные подмножества. Доказать, что подмножества AB, A^{-1} и B^{-1} тоже компактны.

13 Доказать, что дискретная инвариантная подгруппа связной топологической группы является центральной подгруппой.

14 Построить счетную базу топологии для группы $GL(n, R)$ (множество действительных невырожденных матриц размера $n \times n$).

15 Рассматриваем R^2 как топологическую группу по сложению. Пусть Z^2 — подмножество точек R^2 с целыми координатами, а L_α — подмножество точек R^2, лежащих на прямой с угловым коэффициентом α и проходящей через начало координат. Показать, что $Z^2 + L_\alpha$ является подгруппой R^2. При каких α $Z^2 + L_\alpha$ является замкнутой подгруппой?

Лекции 3,4 и 5

1 Показать, что группы $HT(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ и $HT(n) = Sol(n)$ имеют по 2^n компонент связности.

2 Классические матричные группы Ли определяются условиями на матрицы вида

$$A^\sigma F A = F,$$

где символ σ обозначает либо транспонирование, либо эрмитово сопряжение, $(A^\sigma)^\sigma = A$ и $(AB)^\sigma = B^\sigma A^\sigma$, а F — матрица симметричной или антисимметричной невырожденной квадратичной формы. Показать, что

а) эти условия действительно определяют матричную группу (инвариантны относительно произведения матриц и обращения матрицы);

б) если матрица A принадлежит соответствующей группе, то и A^σ тоже принадлежит группе.

(Указание: воспользоваться тем, что в каноническом виде $F^2 = \pm I$ (I — единичная матрица), верхний знак относится к симметричной, а нижний — к антисимметричной форме).

3 Показать, что

а) $Sp(1, R) \approx SL(2, R)$;

б) $Sp(1, C) \approx SL(2, C)$;

в) $Sp(1) \approx SU(2)$.

4 Рассмотрим матрицу A из группы $Sp(n, R)$, она подчиняется условию $A^T F A = F$, где $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (блочная запись, I — единичная матрица размера $n \times n$).

а) Показать, что характеристический многочлен $\rho(\lambda)$ матрицы A, $\rho(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, удовлетворяет свойству

$$\rho(\lambda) = \pm \lambda^{2n} \rho(1/\lambda).$$

б) Используя только что доказанное свойство $\rho(\lambda)$, показать, что $\det A = \rho(0) = 1$.

в) Используя только что доказанное свойство $\det A = 1$, показать, что знак в формуле из пункта а) нужно выбирать положительный:

$$\rho(\lambda) = \lambda^{2n} \rho(1/\lambda).$$

5 Доказать, что

а) $Sp(n, R) \cap SO(2n) \approx U(n)$

(указание: матрицы из $U(n)$ сохраняют скалярное произведение $\sum_a (x^a)^* y^a$; представить комплексные векторы в виде суммы двух действительных векторов, $x^a = x_1{}^a + i x_2{}^a$);

б) $Sp(n, R) \cap SU(2n) \approx U(n)$;

в) $Sp(n, R) \cap GL(n, C) \approx U(n)$;

г) $SO(2n) \cap Sp(n) \approx U(n)$

(указание: рассмотреть подгруппу в $Sp(n)$, матричные элементы которой являются кватернионами с представлением в виде действительных матриц размера 2×2);

д) $Sp(n, C) \cap U(2n) \approx Sp(n)$

(указание: кватернионные матрицы из $Sp(n)$ сохраняют скалярное произведение $\sum_a (\bar{q}^a) p^a$; представить кватернионные векторы в виде суммы двух комплексных векторов $q^a = c_1{}^a + jc_2{}^a$, где в комплексные числа входит мнимая единица i, а j — вторая мнимая единица).

6 Пусть $a_i{}^\dagger$ и a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — бозонные операторы рождения и уничтожения, подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$[a_i, a_j{}^\dagger] = \delta_{ij} \text{ и } [a_i, a_j] = [a_i{}^\dagger, a_j{}^\dagger] = 0.$$

Сконструируем новые операторы $d_i{}^\dagger$ и d_i

$$\begin{pmatrix} d \\ d^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix}$$

(блочная запись). Каким условиям должны удовлетворять $n \times n$-матрицы A, B, C и D, чтобы операторы $(d_i{}^\dagger, d_i)$ удовлетворяли таким же коммутационным соотношениям, что и $(a_i{}^\dagger, a_i)$? Какую группу образуют матрицы $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$?

7 Сфера S^n — это гиперповерхность в R^{n+1}, задаваемая уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1.$$

Показать, что все сферы S^n при $n \geq 2$ — односвязны. (Указание: принять, что при $n = 2$ — это наглядный и очевидный факт, а далее воспользоваться индукцией).

8 Показать, что сфера $S^n \approx SO(n+1)/SO(n)$

9 Показать, что сфера $S^{2n+1} \approx U(n+1)/U(n)$.

10 Рассмотрим матрицы вида

$$X(\bar{c}) = \begin{pmatrix} 0 & -c^3 & c^2 \\ c^3 & 0 & -c^1 \\ -c^2 & c^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что матрицы

$$O(\bar{c}) = \big(I + X(\bar{c})\big)\big(I - X(\bar{c})\big)^{-1}$$

принадлежат к группе $SO(3)$. Найти ось и угол поворота, который задается матрицей $O(\bar{c})$ (намек: во что переходит трехмерный вектор $\bar{c}$ под действием преобразования $O(\bar{c})$?)

Доказать закон композиции

$$O(\bar{c})O(\bar{c}') = O(\bar{c}''), \quad \bar{c}'' = \frac{1}{1 - (\bar{c}\bar{c}')}(\bar{c} + \bar{c}' + \bar{c} \times \bar{c}'),$$

где $(\bar{c}\bar{c}')$ и $\bar{c} \times \bar{c}'$ — скалярное и векторное произведения трехмерных векторов.

Лекции 6, 7, 8 и 9

1 Выбрать базис и определить коммутационные соотношения для базисных векторов в алгебрах Ли групп $SO(3)$, $SU(2)$, $SO(2,1)$ и $SL(2, R)$.

2 Найти алгебры Ли групп $Sp(n)$, $Sp(n,R)$ и $Sp(n,C)$.

3 Показать, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ x\ln x & x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $(x,y,z) \in R$, образуют группу Ли. Найти ее алгебру — определить базис и коммутационные соотношения.

4 То же, что и в предыдущем упражнении, только для матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln x \\ y & x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Пусть G — n-мерная матричная группа Ли и в окрестности единичного элемента e задана система координат $g(x^1,\dots,x^n)$, такая что $g(0,\dots,0) = e$. Показать, что n векторов, принадлежащих к алгебре Ли этой группы,

$$E_i = \frac{\partial}{\partial x^i} g(x^1,\dots,x^n)$$

линейно независимы.

6 Определим матрицы

$$\left(E_{ij}\right)_{\alpha\beta} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}, \ \ (i,j,\alpha,\beta) = 1,2,\dots,n.$$

Здесь индексы i,j нумеруют матрицы, а α,β — матричные индексы; δ_{ij} — символ Кронекера. Показать, что

а) E_{ij} образуют базис алгебры $so(n)$;

б) эти матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[E_{ij}, E_{mn}] = E_{in}\delta_{jm} - E_{im}\delta_{jn} + E_{jm}\delta_{in} - E_{jn}\delta_{im}.$$

(Набор матриц X_{ij} называется базисом Окубо).

Обобщить результат на алгебру $so(p,q)$. (Указание: где-то δ_{ij} придется заменить на $\eta_{ij} = \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ и аккуратно разобраться, какие индексы должны стоять вверху, а какие — внизу).

7 В векторном пространстве R^3 зададим коммутаторы для базисных элементов E_1, E_2 и E_3 следующим образом:

$$[E_a, E_b] = 0, \quad [E_3, E_a] = B_a^b E_b,$$

где $a,b = 1,2$ и B_a^b — некоторая действительная матрица размера 2×2. Показать, что эти коммутационные соотношения определяют алгебру Ли. Найти матрицы B, при которых получаются

а) алгебра Ли группы движений евклидовой плоскости $E(2) = SO(2) \rtimes T_2$ (T_2 — двумерные трансляции);

б) алгебра Ли двумерной группы Пуанкаре $SO(1,1) \rtimes T_2$.

8 В векторном пространстве R^3 зададим коммутаторы для базисных элементов E_1, E_2 и E_3 следующим образом

$$[E_a, E_b] = E_3, \quad [E_3, E_a] = B_a^b E_b,$$

где $a, b = 1, 2$ и B_a^b — некоторая действительная матрица размера 2×2. Показать, что эти коммутационные соотношения определяют алгебру Ли. Найти матрицы B, при которых получаются

а) алгебра $so(3)$;

б) алгебра $so(2,1)$.

9 Линейный оператор $D : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, где $\mathscr{A}$ — алгебра Ли, называется *дифференцированием* алгебры, если он удовлетворяет свойству

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY]$$

для любых $X, Y \in \mathscr{A}$.

а) Показать, что множество всех дифференцирований является алгеброй Ли относительно коммутатора $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$.

б) Сопоставим элементу X из алгебры $\mathscr{A}$ линейный оператор $\hat{X} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ по правилу

$$\hat{X} Y = [X, Y]$$

для любого $Y \in \mathscr{A}$. Показать, что $\hat{X}$ является дифференцированием. Такое дифференцирование называется *внутренним*.

в) Показать, что множество всех внутренних дифференцирований является инвариантной подалгеброй в алгебре Ли всех дифференцирований алгебры $\mathscr{A}$.

10 Пусть B — некоторая действительная (фиксированная) матрица размера $n \times n$ и G — множество $(n+1)$-мерных вектор-столбцов

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{pmatrix}, \quad x^i \in R.$$

Показать, что G является группой Ли относительно умножения

$$X * Y = X + Q(X) Y,$$

где

$$Q(X) = \begin{pmatrix} \exp(x^{n+1} B) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти алгебру Ли этой группы (набор базисных векторов и коммутационные соотношения между ними).

(Указание: это не матричная группа Ли и не матричная алгебра Ли; однако, не составляет труда 1) разложить вектор-столбец X в окрестности единичного элемента вдоль кривых по независимым направлениям и 2) воспользоваться тем, что групповому коммутатору близких к единичному элементов соответствует коммутатор в алгебре Ли).

11 Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ — алгебры Ли. Линейное отображение $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ называется гомоморфизмом алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$, если

$$\phi\big([X, Y]\big) = [\phi(X), \phi(Y)]$$

для любых $X, Y \in \mathscr{A}$.

Пусть G и G' — две матричные группы Ли с алгебрами $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$, соответственно, и $\Phi : G \to G'$ — гомоморфизм групп. Определим отображение $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ по правилу

$$\Phi(e^X) = \exp\big(\phi(X)\big)$$

для любого $X \in \mathscr{A}$.

а) Показать, что определение отображения ϕ корректно (потенциальная опасность: не любой элемент в группе G' может быть представлен в виде экспоненты).

б) Показать, что ϕ — гомоморфизм алгебр $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$.

12 Для произвольных матриц X и Y доказать формулы

а) $e^{\delta X} e^{\delta Y} = \exp\big(\delta(X+Y) + \frac{\delta^2}{2}[X,Y] + \mathscr{O}(\delta^3)\big)$;

б) $e^{\delta X} e^{\delta Y} e^{-\delta X} e^{-\delta Y} = \exp\big(\delta^2[X,Y] + \mathscr{O}(\delta^3)\big)$;

в) $e^{\delta Y} e^{X} e^{-\delta Y} = \exp\big(X + \delta[Y,X] + \mathscr{O}(\delta^2)\big)$.

13 Доказать формулу

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\exp\big(\frac{t}{n}X\big)\exp\big(\frac{t}{n}Y\big)\Big)^n = e^{t(X+Y)},$$

где $t \in R$, а X и Y — произвольные матрицы.

14 Для двух векторов одинаковой длины $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в евклидовом пространстве R^n найти явный вид матрицы O из $SO(n)$, которая переводит один вектор в другой, $O\bar{x} = \bar{y}$.

15 Доказать формулу

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} = \cos R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{\sin R}{R}\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} + \frac{1-\cos R}{R}\begin{pmatrix} x^2 & xy & zx \\ xy & y^2 & zy \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix},$$

где $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

16 Пусть $X \in sl(2,R)$. Показать, что

а) если $\det X < 0$, то

$$e^X = \operatorname{ch}\sqrt{-\det X}\, I + \frac{\operatorname{sh}\sqrt{-\det X}}{\sqrt{-\det X}}\, X;$$

б) если $\det X > 0$, то

$$e^X = \cos\sqrt{\det X}\, I + \frac{\sin\sqrt{\det X}}{\sqrt{\det X}}\, X.$$

17 Показать, что экспоненциальное отображение алгебры Ли нильпотентной матричной группы $UT(n) = Nil(n)$ является взаимно однозначным.

18 Пусть $g(t)$ — гладкая кривая в матричной группе Ли, проходящая через единичный элемент, $g(0) = e$. Доказать формулу

$$\frac{d}{dt}\det g(t) = \det g(t)\,\operatorname{Tr}\Big(g^{-1}(t)\frac{dg(t)}{dt}\Big).$$

Лекция 18

1 Пусть матрица X принадлежит определяющему представлению алгебры $so(n)$. Показать, что

$$\operatorname{Tr}(XX) = c(n)\operatorname{Tr}(\hat{X}\hat{X}) = c(n)K(X,X),$$

где $\hat{X}$ — матрица в присоединенном представлении алгебры. Найти коэффициент пропорциональности $c(n)$. (Указание: можно воспользоваться базисом Окубо, $X = x_{ij}E_{ij}$, где $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$.)

2 То же, что и в предыдущем упражнении, но для алгебры $so(p,q)$ — показать, что

$$\mathrm{Tr}\,(XX) = c(p,q)\,\mathrm{Tr}\,(\hat{X}\hat{X})$$

($X \in so(p,q)$) и найти коэффициент пропорциональности $c(p,q)$.

3 Пусть X, $Y \in sl(n,C)$. Показать, что

$$K(X,Y) = \mathrm{Tr}\,(\hat{X}\hat{Y}) = 2n\mathrm{Tr}\,(XY).$$

4 Пусть X, $Y \in so(n,C)$. Показать, что

$$K(X,Y) = \mathrm{Tr}\,(\hat{X}\hat{Y}) = (n-2)\,\mathrm{Tr}\,(XY).$$

5 Пусть X, $Y \in sp(n,C)$. Показать, что

$$K(X,Y) = \mathrm{Tr}\,(\hat{X}\hat{Y}) = (2n+2)\,\mathrm{Tr}\,(XY).$$

Лекция 20

1 Показать, что инвариантный элемент объема для полупростой (вещественной) группы Ли может быть записан в виде

$$\mathrm{d}V(x) = \sqrt{|\det k_{ij}(x)|}\,\mathrm{d}^n x,$$

где $k_{ij}(x)$ — инвариантный метрический тензор.

2 Найти метрический тензор в группе $SL(2,R)$, используя координаты

$$\begin{pmatrix} 1+x^1 & x^2 \\ x^3 & \dfrac{1+x^2x^3}{1+x^1} \end{pmatrix}.$$

3 Найти инвариантные метрический тензор и элемент объема для группы $SO(3)$. (Указание: удобно воспользоваться следующей параметризацией ортогональных матриц

$$\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

здесь φ, θ и ψ — углы Эйлера.)

4 Найти инвариантные метрический тензор и элемент объема на двумерной сфере S^2, считая ее фактор-многообразием $SO(3)/SO(2)$. (Указание: воспользоваться заданием матриц из группы $SO(3)$ при помощи углов Эйлера.)

Вычислить метрический тензор и элемент объема (элемент площади) на сфере S^2, которые индуцируются ее вложением в трехмерное евклидово пространство ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$ — уравнение сферы). Сравнить с формулами, полученными ранее.

5 Показать, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} x & 0 & y \\ x\ln x & x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $(x, y, z) \in R$, образуют группу. Найти для нее метрический тензор, лево- и правоинвариантный элементы объема.

6 То же, что и в предыдущем упражнении, только для матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln x \\ y & x & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 Найти лево- и правоинвариантный элементы объема для матричной нильпотентной группы $Nil(n)$ (треугольные матрицы с единицей на главной диагонали).